MIT Açık Ders Malzemeleri

http://ocw.mit.edu

18.112 Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar

2008 Güz

Ders #20: Riemann Tasvir Teoremi

(Ders kitabındaki 229-231. sayfalar)

Hatırlatma İlk adım, $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ koşullarını sağlayan Ω yı birim daire D içine resmeden analitik ve yalınkat bir fonksiyonun varlığını göstermektir. $f(\Omega)$ yı genişletmek için $f'(z_0)$ ı yeterince büyük alalım. Görülecektir ki, bu işlem bizi $f(\Omega) = D$ çözümüne götürür.

İspat aşağıdaki çelişki ile sonlandırılır:

$$|G'(z_0)| > B = |f'(z_0)|.$$

İspattan sonra ders kitabında da belirtildiği üzere $|f'(z_0)| < |G'(z_0)|$ çelişkisi,

$$f(z) = H(W),\ W = G(z)$$

yazılmasıyla, Schwarz lemmasının bir sonucudur.

Fakat, bu durumda H fonksiyonu yalnızca $G(\Omega)$ üzerinde tanımlanmış olur, bu halde $G(\Omega) = D$ olduğunu bilmeden Schwarz lemması (s. 135) uygulanamaz.

Bu nedenle "Schwarz lemmasının bir sonucudur" cümlesi, muhtemelen yazarın kastettiği, "Schwarz lemması ile uyumlu olarak" biçiminde okunmalıdır.

Koebe'nin 1915 yılında yaptığı ispat, Pólya ve Szegö' nin kitabı Cilt II, Bölüm 2 de özetlenmiştir. Bu ispat, orijinin görüntü bölgesi $f(\Omega)$ nın sınırına olan uzaklığının dikkate alınmasına dayanmaktadır. Karekök tasviri (fonksiyonu) bu mesafeyi arttırmak için kullanılır. Ötelemeyle, istenilen limit tasvirine yakınsayan belirli bir diziye ulaşılmasını sağlar.