18.112 Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar
2008 Güz

Ders #21 ve 22: Asal Sayı Teoremi

(Ders kitabında olmayan yeni notlar)

Asal sayılar, sayılar teoresinde önemli bir yer tutmaktadır. 1808 civarında Legendre deneysel olarak, yeterince büyük x ler için, x den küçük olan asal sayıların sayısı $\pi(x)$ in $x/\log x$ gibi davrandığını kanıtladı. Tchebychev (1848) yılında, $\pi(x)$ in $x/\log x$ e oranının yeterince büyük x ler için 7/8 ile 9/8 arasında olduğunu, kısmen kanıtladı. 1896 yılında Hadamard ve de la Valle Poussin birbirinden bağımsız olarak Asal Sayı Teoremini, bu oranın limitinin tam olarak 1 olduğunu göstererek kanıtladılar. Birçok seçkin matematikçi (özellikle Norbert Wiener) ispatın basitleştirilmesine katkıda bulunmuştur ve günümüzde D.J. Newman' ın çıkarımına ve D. Zagier' in çalışmasına dayanan oldukça kısa ve basit bir ispatı vardır.

Bu notlar Zagier' in anlatımı ile Newman' a ait asal sayılar teoreminin kısa ispatına dayanmaktadır. Bakınız:

(1) D.J.Newman, Simple Analytic Proof of the Prime Number Theorem, Amer. Math. Monthly 87 (1980), 693-697.

(2) D.Zagier, Newman's short proof of the Prime Number Theorem. Amer. Math. Monthly 104 (1997), 705-708.

Asal sayı teoremi, x den küçük olan asal sayıların sayısı $\pi(x)$ in asimptotik olarak $\dfrac{x}{\log x}$ gibi olduğunu ifade eder: $x \to \infty$ için

$$\frac{\pi(x)}{x/\log x} \to 1.$$

Aşağıdaki Euler'in çarpım formülü (I) sayesinde (s. 213) ve özellikle Riemann'nın çalışmasından $\pi(x)$, $\operatorname{Re} s > 1$ bölgesinde holomorfik olan,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Riemann zeta fonksiyonu ile yakından ilgilidir.

Asal sayı teoremi aşağıdaki fonksiyonlar yardımıyla kanıtlanır:

$$\Phi(s) = \sum_{p \ asal} \frac{\log p}{p^s}, \qquad \nu(x) = \sum_{p \leq x \ asal} \log p.$$

Φ nin basit özellikleri $\zeta(s) \neq 0$ ve $\Phi(s) - \dfrac{1}{s-1}$ in $\operatorname{Re} s \geq 1$ için holomorfik olduğunu göstermek için kullanılacaktır. $\Phi(s)$ nin köklü özellikleri, onun üzerinde Cauchy teoreminin uygulandığı bir eğrisel integral olarak ifade edilmesinden çıkar.

Yukarıda belirtilen basit özelliklerden, $\nu(x) \sim x$ sonucu ve buradan da Asal sayı teoremi kolayca elde edilir.

I. $\operatorname{Re} s > 1$ için $\dfrac{1}{\zeta(s)} = \prod_p (1 - p^{-s})$ dir.

İspat: Ders kitabındaki 213. sayfaya bakınız.

II. $\zeta(s) - \dfrac{1}{s-1}$ fonksiyonu $\operatorname{Re} s > 0$ yarı düzleminde holomorfik bir fonksiyona genişletilebilir.

İspat: Gerçekten $\operatorname{Re} s > 1$ için,

$$\begin{aligned} \zeta(s) - \frac{1}{s-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \end{aligned}$$

dir. Fakat

$$\left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right| = \left| \int_n^x s \frac{dy}{y^{s+1}} \right| \leq \max_{n \leq y \leq x} \left| \frac{s}{y^{s+1}} \right| \leq \frac{s}{n^{\operatorname{Re} s+1}}$$

olduğundan, yukarıdaki toplam her $\operatorname{Re} s \geq \delta$ $(\delta > 0)$ yarı düzleminde düzgün yakınsar.

III. $\nu(x) = O(x)$ (Kesin biçimi daha sonra ispatlanacak)

İspat: p, $n < p \leq 2n$ aralığında olduğundan p sayısı $n!$ i bölemez fakat $(2n)!$ i böler. Böylece

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} \geq \binom{2n}{n} \geq \prod_{n < p \leq 2n} p = e^{\nu(2n) - \nu(n)}$$

olur. Bu nedenle

$$\nu(2n) - \nu(n) \leq 2n \log 2 \tag{1}$$

bulunur.

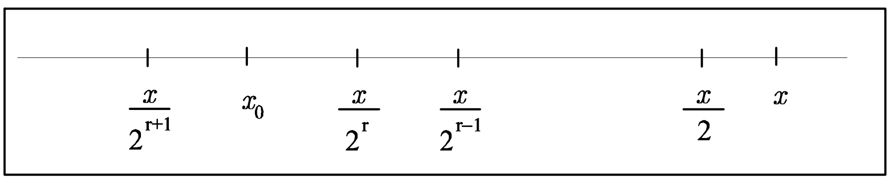
x keyfi ise, n yi $n < \frac{x}{2} \leq n+1$ olacak biçimde seçelim. Bu durumda, (1) den

$$\begin{aligned}
\nu(x) &\leq \nu(2n+2) \leq \nu(n+1) + (2n+2)\log 2 \\
&\leq \nu\left(\frac{x}{2}+1\right) + (x+2)\log 2 \\
&= \nu\left(\frac{x}{2}\right) + \log\left(\frac{x}{2}+1\right) + (x+2)\log 2
\end{aligned}$$

olur. $C > \log 2$ ise, $x \geq x_0(C)$ için

$$\nu(x) - \nu\left(\frac{x}{2}\right) \leq Cx \tag{2}$$

bulunur. Aşağıdaki noktaları gözönüne alalım:



x_0 ın sağındaki noktalar için (2) kullanılırsa

$$\begin{gathered}
\nu\left(\frac{x}{2}\right) - \nu\left(\frac{x}{2^2}\right) \leq C\frac{x}{2}, \\
\vdots \\
\nu\left(\frac{x}{2^r}\right) - \nu\left(\frac{x}{2^{r+1}}\right) \leq C\frac{x}{2^r}
\end{gathered}$$

olur. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned}
\nu(x) - \nu(x_0) &\leq \nu(x) - \nu\left(\frac{x}{2^{r+1}}\right) \\
&\leq Cx + \cdots + C\frac{x}{2^r}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\nu(x) \leq 2Cx + O(1)$$

çıkar.

IV. $\zeta(s) \neq 0$ ve $\Phi(s) - \dfrac{1}{s-1}$ fonksiyonu $\operatorname{Re} s \geq 1$ için holomorfiktir.

İspat: $\operatorname{Re} s > 1$ ise, **I)** den $\zeta(s) \neq 0$ çıkar ve

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \frac{\log p}{p^s - 1} = \Phi(s) + \sum_p \frac{\log p}{p^s \left(p^s - 1\right)} \tag{3}$$

olur. Son toplam $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ için yakınsaktır. Böylece **II)** den $\Phi(s)$ fonksiyonu $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ bölgesine, kutupları yalnızca $s = 1$ ve $\zeta(s)$ nin sıfırlarında olan meromorfik olarak genişletilir. Dikkat edilirse,

$$\zeta(s) = 0 \Longrightarrow \zeta(\overline{s}) = 0$$

dir.

$\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $s_0 = 1 + i\alpha$, $\zeta(s)$ nin $\mu \geq 0$ ıncı mertebeden bir sıfır yeri ise

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{\mu}{s - s_0} + s_0 \text{ civarında meromorfik fonksiyon}$$

dir. Bu nedenle

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \Phi\left(1 + \varepsilon + i\alpha\right) = -\mu$$

olur. $\varepsilon > 0$ için

$$\Phi\left(1 + \varepsilon\right) = \sum_p \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}}$$

ifadesindeki her terimin pozitifliğinden faydalanılarak

$$\sum_p \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}} \left(p^{+\frac{i\alpha}{2}} + p^{-\frac{i\alpha}{2}}\right)^2 \geq 0$$

elde edilir. Böylece

$$\Phi\left(1 + \varepsilon + i\alpha\right) + \Phi\left(1 + \varepsilon - i\alpha\right) + 2\Phi\left(1 + \varepsilon\right) \geq 0 \tag{4}$$

olur.

II) den $s = 1$, $\zeta(s)$ nin rezidüsü $+1$ olan bir basit kutup noktasıdır. Bu nedenle

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \Phi\left(1 + \varepsilon\right) = 1$$

dir. Böylece (4) den

$$-2\mu + 2 \geq 0$$

ve

$$\mu \leq 1$$

olur. Bu yeterince iyi değildir, bu yüzden

$$\sum_p \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}} \left(p^{+\frac{i\alpha}{2}} + p^{-\frac{i\alpha}{2}}\right)^4 \geq 0$$

kullanalım. ν, $\zeta(s)$ nin sıfırı olan $1 \pm 2i\alpha$ nın mertebesini göstermek üzere

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon\Phi\left(1 + \varepsilon \pm 2i\alpha\right) = -\nu$$

yazılırsa, benzer hesapla

$$6 - 8\mu - 2\nu \geq 0$$

bulunur. Buradan $\mu, \nu \geq 0$ olduğundan $\mu = 0$ bulunur. **II)** ve (3) den $\Phi(s) - \dfrac{1}{s-1}$ fonksiyonu $\operatorname{Re} s \geq 1$ için holomorfiktir.

V. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\nu(x) - x}{x^2}\, dx$ yakınsaktır.

İspat: $\nu(x)$ fonksiyonu $x = p$ noktalarında $\log p$ değerleri ile artmaktadır. Bu nedenle

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \sum_p \frac{\log p}{p^s} \\ &= s\int_1^\infty \frac{\nu(x)}{x^{s+1}}\, dx\end{aligned}$$

dir. Gerçekten, $\int_1^\infty$ yerine $\sum_i \int_{p_i}^{p_{i+1}}$ yazılırsa yukarıdaki integral $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(p_i)\left(\frac{1}{p_i^s} - \frac{1}{p_{i+1}^s}\right) s^{-1}$ biçimini alır ve $\nu(p_{i+1}) - \nu(p_i) = \log p_{i+1}$ ile birlikte $\Phi(s)$ ye indirgenir. $x = e^t$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\Phi(s) = s\int_0^\infty e^{-st}\nu\left(e^t\right)\, dt \qquad \operatorname{Re} s > 1$$

elde edilir. Şimdi

$$\begin{aligned} f(t) &= \nu\left(e^t\right)e^{-t} - 1 \\ g(z) &= \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} \end{aligned}$$

fonksiyonlarını gözönüne alalım. **III)** den $f(t)$ fonksiyonu sınırlıdır ve

$$\int_1^{e^T} \frac{\nu(x) - x}{x^2}\, dx = \int_0^T f(t)\, dt \tag{5}$$

dir. Aynı zamanda **IV)** den, $h(z)$ fonksiyonu $\operatorname{Re} z \geq 0$ da holomorfik olmak üzere

$$\Phi(z+1) = \frac{1}{z} + h(z)$$

dir ve böylece

$$g(z) = \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} = \frac{h(z) - 1}{z+1}$$

fonksiyonu $\operatorname{Re} z \geq 0$ da holomorfiktir.

$\operatorname{Re} z > 0$ için

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_0^\infty e^{-zt}\left(f(t) + 1\right)\, dt - \int_0^\infty e^{-zt}\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi aşağıdaki teoremi gözönüne alalım:

Teorem 1 (Analitik Teorem) $f(t)$ $(t \geq 0)$ *sınırlı ve yerel integrallenebilir bir fonksiyon olsun ve*

$$g(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt \qquad \operatorname{Re} z > 0$$

fonksiyonu $\operatorname{Re} z \geq 0$ *üzerinde holomorfik bir fonksiyona genişlediğini varsayalım. Bu halde,*

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T f(t)\, dt$$

integrali vardır ve $g(0)$ *a eşittir.*

Bu bize (5) ile birlikte **V)** i verir. Analitik Teorem'in ispatı daha sonra verilecektir.

VI. $\nu(x) \sim x$ dir.

İspat: $\lambda > 1$ olmak üzere yeterince büyük x ler için $\nu(x) \geq \lambda x$ gerçeklendiğini varsayalım. $\nu(x)$ artan olduğundan yeterince büyük x ler için

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\nu(t) - t}{t^2}\, dt \geq \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\, dt = \int_1^{\lambda} \frac{\lambda - s}{s^2}\, ds = \delta(\lambda) > 0$$

olur. Diğer taraftan, **V)** ten her $\varepsilon > 0$ için

$$\left| \int_{K_1}^{K_2} \frac{\nu(x) - x}{x^2}\, dx \right| < \varepsilon \qquad (K_1, K_2 > K \text{ için})$$

gerçeklenecek biçimde bir K sayısı vardır. Bu nedenle böyle bir λ bulunamaz.

Benzer biçimde, $\lambda < 1$ ise yeterince büyük x ler için $\nu(x) \leq \lambda x$ gerçeklensin. Bu durumda $t \leq x$ için

$$\nu(t) \leq \nu(x) \leq \lambda x$$

olur. Böylece

$$\int_{\lambda x}^{x} \frac{\nu(t) - t}{t^2}\, dt \leq \int_{\lambda x}^{x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\, dt = \int_{\lambda}^{1} \frac{\lambda - s}{s^2}\, ds = \delta(\lambda) < 0$$

bulunur. Aynı sebepten dolayı bu da mümkün değildir. O halde

$$\beta = \limsup_{x \to \infty} \frac{\nu(x)}{x} > 1$$

ve

$$\alpha = \liminf_{x \to \infty} \frac{\nu(x)}{x} < 1$$

durumlarının her ikisi de imkansızdır. Bu nedenle de aynı olmak zorundadır, yani $\nu(x) \sim x$ dir.

Asal Sayı Teoreminin İspatı:

$$\nu(x)=\sum_{p\le x}\log p.\le\sum_{p\le x}\log x=\pi\left(x\right)\log x$$

gerçeklendiğinden

$$\lim_{x\to\infty}\inf\frac{\pi\left(x\right)\log x}{x}\ge\lim_{x\to\infty}\inf\frac{\nu\left(x\right)}{x}=1$$

bulunur. İkinci olarak, $0<\varepsilon<1$ ise

$$\begin{aligned}\nu(x) &\ge \sum_{x^{1-\varepsilon}\le p\le x}\log p\\ &\ge (1-\varepsilon)\sum_{x^{1-\varepsilon}\le p\le x}\log x\\ &= (1-\varepsilon)\log x\left(\pi\left(x\right)+O\left(x^{1-\varepsilon}\right)\right)\end{aligned}$$

olur ve her ε için

$$\lim_{x\to\infty}\sup\frac{\pi\left(x\right)\log x}{x}\le\frac{1}{1-\varepsilon}\lim_{x\to\infty}\sup\frac{\nu(x)}{x}$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi\left(x\right)\log x}{x}=1$$

çıkar.

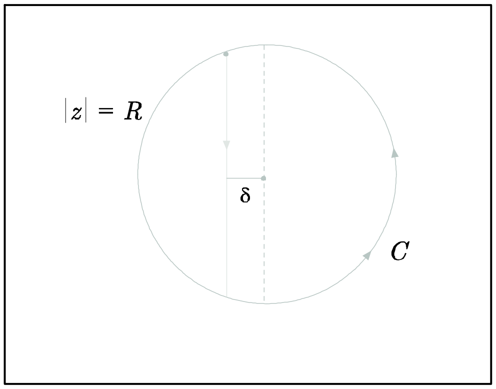
Analitik Teoremin İspatı: (Newman) $\mathbb{C}$ de holomorfik olan

$$g_T(z)=\int_0^T e^{-zt}f(t)\ dt$$

diyelim.

$$\lim_{T\to\infty}\ g_T(0)=g(0)$$

olduğunu göstermeliyiz.



R sabit olsun ve $\delta > 0$ sayısını, $g(z)$ fonksiyonu C içinde ve üzerinde analitik olacak biçimde yeterince küçük alalım. Cauchy formülünden

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (g(z) - g_T(z))\, e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} \qquad (6)$$

dir.

$$C_+ : C \cap (\operatorname{Re} z > 0)$$

yarım çemberi üzerinde,

$$B = \sup_{t \geq 0} \, |f(t)|$$

olmak üzere, integrand $\frac{2B}{R^2}$ ile sınırlıdır. Bu yüzden, $\operatorname{Re} z > 0$ için

$$\begin{aligned} |g(z) - g_T(z)| &= \left| \int_T^\infty f(t)\, e^{-zt}\, dt \right| \\ &\leq B \int_T^\infty \left| e^{-zt} \right| \, dt \\ &= \frac{B e^{-\operatorname{Re} z T}}{\operatorname{Re} z} \end{aligned}$$

ve

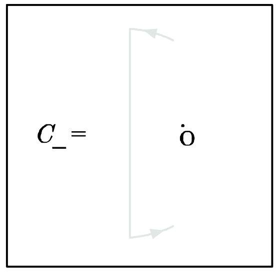
$$\left| e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| = e^{\operatorname{Re} z T} \cdot \frac{2 \operatorname{Re} z}{R^2} \qquad \left(z = \operatorname{Re}^{i\theta}\right)$$

dir. Böylece C_+ üzerinde alınan (6) integrali,

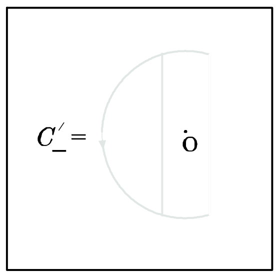
$$\frac{B e^{-\operatorname{Re} z T}}{\operatorname{Re} z} \cdot e^{\operatorname{Re} z T} \cdot \frac{2 \operatorname{Re} z}{R^2} \cdot \pi R \frac{1}{2\pi} = \frac{B}{R}$$

olduğundan, $\frac{B}{R}$ ile sınırlıdır.

Sonra aşağıdaki bölge üzerindeki integrali gözönüne alalım:



$g(z)$ ve $g_T(z)$ fonksiyonlarını ayrı ayrı inceleyelim. $g_T(z)$ tam fonksiyonu için bu yol aşağıdaki ile değiştirilebilir.



Yine integral $\dfrac{B}{R}$ ile sınırlıdır, çünkü

$$\begin{aligned} |g_T(z)| &= \left| \int_0^T f(t)\, e^{-zt}\, dt \right| \\ &\leq B \int_0^T \left| e^{-zt} \right| dt \\ &\leq B \int_{-\infty}^T \left| e^{-zt} \right| dt \\ &= \frac{B e^{-\operatorname{Re} z T}}{|\operatorname{Re} z|} \end{aligned}$$

dir ve

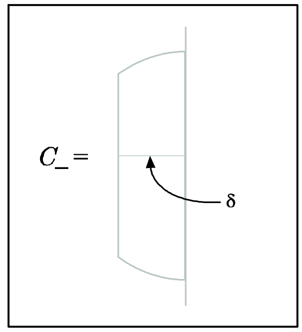
$$\left| \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) \frac{1}{z} \right|$$

de önceki gibi C'_- üzerinde aynı değere sahiptir.

Geriye

$\int_{C_-} e^{zT} \underbrace{g(z)\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}dz}_{T \text{ den bağımsız}}$

integrali kalır.



Yol üzerinde $\left|e^{zT}\right| \leq 1$ dir ve $\operatorname{Re} z < 0$ için

$$\lim_{T\to\infty} \left|e^{zT}\right| \to 0$$

dır. Baskın yakınsaklıktan, $T \to +\infty$ iken integral $\to 0$, δ sabittir. Bu nedenle

$$\lim_{T\to\infty} \sup |g(0) - g_T(0)| \leq \frac{2B}{R}$$

olur. R keyfi olduğundan, teorem kanıtlanmış olur.

Uyarı: Riemann asal sayılar için, $\zeta(s)$ nin $0 < \operatorname{Re} s < 1$ içindeki sıfırları ρ ile bağlantılı olan açık bir formül kanıtladı. Bu ispatın von Mangoldt tarafından verilen gelişmiş biçimi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \nu(x) &= \sum_{p\leq x} \log p \\ &= x - \sum_{\{\rho\}} \frac{x^{\rho}}{\rho} + \sum_{n\geq 1} \frac{x^{-2n}}{2n} - \log 2\pi. \end{aligned}$$

von Mangoldt, her ρ için $\operatorname{Re}\rho = \frac{1}{2}$ olduğunu tahmin etmiştir. Bu ünlü **Riemann Hipotezi**dir.