18.112 Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar
2008 Güz

Ders #23: Gamma Fonksiyonu ve Zeta Fonksiyonu için Fonksiyonel Eşitlik

(Ders kitabında 212-217 sayfalar)

Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\, dt \qquad \operatorname{Re} z > 0$$

biçiminde tanımlanabilir.

$$f_n(z) = \int_0^n t^{z-1}e^{-t}\, dt$$

yazılırsa, $f_n(z)$ fonksiyonu holomorfiktir ve

$$|\Gamma(z) - f_n(z)| \leq \left| \int_n^\infty t^{z-1}e^{-t}\, dt \right| \leq \int_n^\infty t^{\operatorname{Re} z-1}e^{-t}\, dt$$

her $\operatorname{Re} z > \delta$ $(\delta > 0)$ yarı düzleminde 0 a düzgün yakınsar. Bu nedenle $\Gamma(z)$ fonksiyonu $\operatorname{Re} z > 0$ bölgesinde holomorfiktir. Gamma fonksiyonunun bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

(i) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ dir.

Bu özellik kısmı integrasyonla kolayca gösterilebilir.

(ii) $\Gamma(z)$ fonksiyonu $z = 0, -1, -2, ...$ noktalarında basit kutupları olan $\mathbb{C}$ de meromorfik bir fonksiyona genişletilebilir.

$$H(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

fonksiyonu $z = 0$ da kutbu olan $\operatorname{Re} z > -1$ de meromorfik bir fonksiyondur.

$$\lim_{z \to 0} zH(z) \neq 0$$

olduğundan, kutup noktası basittir. Rezidüsü $\Gamma(1) = 1$ dir. Hatta $\operatorname{Re} z > 0$ için $H(z) = \Gamma(z)$ dir. Böylece $\Gamma(z)$, $z = 0$ da basit kutba sahip $\operatorname{Re} z > -1$ de meromorfik olan fonksiyondur. (ii) iddiası bu şekilde devam ettirilerek gösterilebilir.

(iii) $x > 0, y > 0$ için

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

dir.

İspat:

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ dt \int_0^\infty s^{y-1}e^{-s}\ ds$$

$s = tv$ yazalım. İntegrandlar pozitif olduğundan, integraller yer değiştirebilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ dt \int_0^\infty t^y v^{y-1} e^{-tv}\ dv \\
&= \int_0^\infty v^{y-1}\ dv \int_0^\infty t^{x+y-1}e^{-(v+1)t}\ dt \qquad t = \frac{u}{1+v} \\
&= \int_0^\infty v^{y-1}\ dv \int_0^\infty u^{x+y-1}e^{-u}\,(1+v)^{-x-y}\ du \\
&= \Gamma(x+y)\int_0^\infty \frac{v^{y-1}}{(1+v)^{x+y}}\ dv \\
&= \Gamma(x+y)\int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{y-1}\ ds \qquad (1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son ifade $v = s^{-1}(1-s)$ yazılmasıyla bulunur. Böylece (iii) kanıtlanmış olur.
(iv) $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ dir.

(1) formülünden 161. sayfadaki Alıştırma 3(g) deki yöntemle $\pi/\sin \pi x$ i veren

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \frac{v^{-x}}{1+v}\ dv$$

formülü bulunur. Böylece, meromorfik devamla (iv) kanıtlanmış olur.

$\Gamma(z)$ fonksiyonunun kutupları $\sin \pi z$ nin sıfırları ile sadeleştiğinden, $\Gamma(1-z)$ hiçbir zaman 0 olamaz.