18.112 Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar
2008 Güz

Ders #7: Doğrusal Dönüşümler

(Ders kitabında 80-89. sayfalar)

Ders #7 ile ilgili uyarı

81. sayfadaki Tanım 13 ile ilgili olarak, (11) bağıntısı tanımın z_1, z_2, z_3 ün seçiminden bağımsız olacağını gösterir.

88. sayfadaki Alıştırma 2) nin küçük bir düzeltmeye ihtiyacı vardır. Örneğin, 86. sayfadaki tanıma göre $w = -z$ hiperboliktir. Fakat bu,

$$ad - bc = 1$$

olmak üzere

$$\frac{az + b}{cz + d}$$

biçiminde yazıldığında

$$a = -d = i$$

almalıyız ve böylece

$$a + d = 0$$

olur.

$w = z$ dönüşümü başka belirsizliklere neden olur. Bu nedenle tanımı biraz değiştirmeliyiz.

Tanım 1 Verilen bir S dönüşümü,

- Birim dönüşüm ya da tek bir sabit noktaya sahipse, *paraboliktir*.
- (12) bağıntısında $k > 0$ fakat $k \neq 1$ ise, *kesin hiperboliktir.*
- 86. sayfada $|k| = 1$ fakat S birim dönüşüm değilse, *eliptiktir*.

Bu durumda Alıştırma 2) nin ifadesi hiperbolik yerine *kesin hiperbolik* yazılması halinde geçerli kalır.

(i)

$$Sz = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

için tek bir sabit noktası olması koşulu

$$(\alpha - \delta)^2 = -4\beta\gamma \qquad\qquad \text{(metinde yanlış işaretli)}$$

dir.

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

normalizasyonuyla istenilen bulunur:

$$(\alpha + \delta)^2 = 4.$$

(ii) Varsayalım ki iki sabit nokta a ve b olsun.

$$\frac{w-a}{w-b} = k\ \frac{z-a}{z-b}$$

yi

$$w = Tz = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

biçiminde yazabiliriz.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

diyelim ve

$$Tr^2(A) = \frac{(\dot{I}zA)^2}{\det A}$$

tanımlayalım. Lineer cebir derslerinden

$$\dot{I}z(BAB^{-1}) = \dot{I}z(A)$$

ve

$$\det(BAB^{-1}) = \det A$$

dır. z_1 ve w_1 aşağıdaki biçimde tanımlansın:

$$z_1 = Sz = \frac{z-a}{z-b}$$

ve

$$w_1 = Sw = \frac{w-a}{w-b}.$$

Bu durumda

$$Tr^2(T) = Tr^2(STS^{-1})$$

olur.

$$w_1 = STz = STS^{-1}z_1$$

olduğundan

$$w_1 = kz_1$$

dir. Bu nedenle

$$Tr^2(T) = Tr^2(STS^{-1}) = k + \frac{1}{k} + 2$$

bulunur. T kesin hiperbolik ise,

$$k > 0,\ \ k \neq 1$$

olduğundan,

$$Tr^2(T) > 4$$

olur. Bu ise

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

varsayımı altında, daha önce belirtildiği gibi

$$(\alpha + \delta)^2 > 4$$

demektir.

Tersine, eğer

$$(\alpha + \delta)^2 > 4$$

ise $k > 0$ dır. Böylece

$$w_1 = kz_1$$

dönüşümü, 0 ve ∞ dan geçen her doğruyu kendi üzerine resmeder. Bu nedenle, T dönüşümü, $k > 0$ olmak üzere, her C_1 çemberini kendi içine resmeder. Bu halde, T kesin hiperboliktir.

(iii) $|k| = 1$ ise

$$w_1 = e^{i\theta} z_1$$

dir ve $\theta = 0$ durumu dışlandığından,

$$Tr^2(T) = \left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 < 4$$

bulunur.

Tersine, eğer

$$-2 < \alpha + \delta < 2,\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

ise

$$Tr^2(T) = (\alpha+\delta)^2 = k + \frac{1}{k} + 2 < 4$$

olur. $k = re^{i\theta}$ $(r > 0)$ yazılırsa,

$$\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta < 2$$

çıkar. Buradan

$$r = 1 \qquad \text{veya} \qquad \theta = 0 \qquad \text{veya} \qquad \theta = \pi$$

çıkar.

$r = 1$ ise, $|k| = 1$ olur ve T eliptiktir.

$r + \dfrac{1}{r} \geq 2$ olduğundan, $\theta = 0$ olması durumu gözardı edilmiştir.

Son olarak, $\theta = \pi$ ise, $k = -r$ dir ve buradan

$$(\alpha+\delta)^2 = -r - \frac{1}{r} + 2$$

olur. Fakat $r \geq 0$ ve $\alpha + \delta$ reel olduğundan, $r = 1$ olur, bu nedenle, $k = -1$ dir ve T böylece eliptiktir.