18.112 Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar
2008 Güz

18.112 Final Sınavı Çözümleri

Problem 1.

1. Yol (Geometrik Yol): A, B ve C kompleks düzlemde a, b ve c kompleks sayılarına karşılık gelen noktalar olsun. Bu durumda

$$\overrightarrow{AB} = b - a, \overrightarrow{BC} = c - b, \overrightarrow{CA} = a - c$$

ve

$$\angle A = \arg \frac{b-a}{c-a}, \angle B = \arg \frac{c-b}{a-b}, \angle C = \arg \frac{a-c}{b-c}$$

dir.

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{a-c}{b-c}$$

koşulundan

$$\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{CA}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{CA}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$$

ve

$$\angle A = \angle C$$

dir, yani

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CA}\right| \left|\overrightarrow{CA}\right|$$

ve

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

dir. Böylece

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CA}\right|$$

olur yani

$$|b-a| = |c-a| = |b-c|$$

bulunur.

2. Yol (Aritmetik Çözüm): İlk olarak dikkat edilirse

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{a-c}{b-c} \Rightarrow \frac{b-a}{c-a} = \frac{a-c}{b-c} = \frac{b-a+a-c}{c-a+b-c} = \frac{b-c}{b-a}$$

olur. Halbuki

$$\left|\frac{b-a}{c-a}\cdot\frac{a-c}{b-c}\cdot\frac{b-c}{b-a}\right|=1$$

dir. Böylece

$$\left|\frac{b-a}{c-a}\right|=\left|\frac{a-c}{b-c}\right|=\left|\frac{b-c}{b-a}\right|=1$$

yani

$$|b-a|=|c-a|=|b-c|$$

bulunur.

Problem 2.

Çözüm: Seri

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1+z^{2n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n+z^{-n}}$$

biçiminde tekrar yazılırsa, $|z|>1$ ve $|z|<1$ içinde yakınsadığı görülebilir.

$|z|=1$ üzerinde, $z=e^{i\theta}$ yazılabilir. Bu durumda, her θ için $n\to\infty$ iken

$$\frac{1}{z^n+z^{-n}}=\frac{1}{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}=\frac{1}{2\cos n\theta}\nrightarrow 0,$$

bu nedenle $|z|=1$ üzerinde seri yakınsamaz.

Ayrıca, $|z|>1$ veya $|z|<1$ in herhangi bir K kompakt alt kümesi için, K üzerinde $|z|>C>1$ veya $|z|<C<1$ olacak biçimde bazı $C>1$ veya $C<1$ sabitleri bulabiliriz. Böylece, her $z\in K$ için

$$\left|\frac{1}{z^n+z^{-n}}\right|<\frac{1}{C^n+C^{-n}}$$

olur.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{C^n+C^{-n}}$$

serisi daima yakınsayacağından,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1+z^{2n}}$$

serisi $|z|>1$ ve $|z|<1$ in her kompakt alt kümesi üzerinde düzgün yakınsar. Bu nedenle sayfa 177 deki Weierstrass teoreminin denk biçiminden, toplam fonksiyonu $f(z)$, $|z|>1$ ve $|z|<1$ içinde holomorfiktir.

Problem 3.

Çözüm: γ üzerinde $|z| = 2$ dikkat edilirse,

$$\int_\gamma \frac{|z|\, e^z}{z^2}\, dz = \int_\gamma \frac{2e^z}{z^2}\, dz$$

olur. $\frac{2e^z}{z^2}$ fonksiyonu $z = 0$ da yalnızca bir kutbu vardır ve Taylor açılımından

$$\begin{aligned} \frac{2e^z}{z^2} &= 2\frac{1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \cdots}{z^2} \\ &= 2\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \cdots\right) \end{aligned}$$

dir. Bu nedenle

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{2e^z}{z^2} = 2$$

olur. Rezidü teoreminden

$$\int_\gamma \frac{|z|\, e^z}{z^2}\, dz = 2 \cdot 2\pi i = 4\pi i$$

bulunur.

Problem 4.

Çözüm:$g(z)$ fonksiyonu z_0 ın civarında holomorfik olmak üzere

$$f(z) = (z - z_0)^{-h}\, g(z)$$

yazabiliriz. Sayfa 120 deki (24) formülünden

$$\begin{aligned} g^{(h-1)}(z_0) &= \frac{(h-1)!}{2\pi i} \int_C \frac{g(z)}{(z - z_0)^h}\, dz \\ &= (h-1)!\, \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) \end{aligned}$$

olur. Bu nedenle

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(h-1)!} \left\{ \frac{d^{h-1}}{dz^{h-1}} (z - z_0)^h f(z) \right\}_{z=z_0}$$

bulunur.

Problem 5.

Çözüm: $|z| < 1$ de, $\frac{1}{1-z}$ ve $\frac{1}{1-z/2}$ için geometrik seri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{1-z}\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} \\
&= \left(1+z+z^2+\cdots\right)\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\cdots\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[1+\left(1+\frac{1}{2}\right)z+\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)z^2+\cdots\right. \\
&\quad \left.+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)z^n+\cdots\right] \\
&= \frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2+\cdots+\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)z^n+\cdots
\end{aligned}$$

bulunur.

Aynı yolla, $|z| > 2$ de $\frac{1}{1-1/z}$ ve $\frac{1}{1-2/z}$ için geometrik seri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} \\
&= \frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{z}\right)^2+\cdots\right)\left(1+\frac{2}{z}+\left(\frac{2}{z}\right)^2+\cdots\right) \\
&= \frac{1}{z^2}\left[1+(1+2)\frac{1}{z}+\left(1+2+2^2\right)\frac{1}{z^2}+\cdots+\left(1+2+\cdots+2^n\right)\frac{1}{z^n}\right] \\
&= \frac{1}{z^2}+3\frac{1}{z^3}+7\frac{1}{z^4}+\cdots+\left(2^{n+1}-1\right)\frac{1}{z^{n+2}}+\cdots
\end{aligned}$$

bulunur.

Problem 6.

Çözüm:

$$g(z) = f(z) - z, h(z) = -z$$

olsun. Her ikisi fonksiyon da $|z| \leq 1$ de analitikdir. $|z| = 1$ sınırı üzerinde

$$|g(z) - h(z)| = |f(z)| < 1 = |h(z)|$$

dir. Böylece Rouche Teoreminden, $g(z) = f(z) - z$ nin $|z| = 1$ içinde tam bir tane sıfırı vardır.