18.112 Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar
2008 Güz

18.112 Arasınav 1 Çözümleri

Problem 1.

Çözüm:

$$z^3 = 8e^{-i\pi/2} \Longrightarrow z = 2e^{-i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2n\pi}{3}\right)},\ 0 \le n \le 2,$$
$$\Longrightarrow z = 2i \text{ veya } z = \sqrt{3} - i \text{ veya } z = -\sqrt{3} - i$$

Problem 2.

1. Yol:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(1-z)^3} &= \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}/2}{(-e^{it}/2)^3}\ dt \\
&= \frac{-i}{2} \cdot 8 \int_0^{2\pi} e^{-i\cdot 2t}\ dt \\
&= -4i\ \left.\frac{e^{-2it}}{-2i}\right|_0^{2\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2. Yol: $f(z) \equiv 1$ olsun. 120. sayfadaki (24) formülünden,

$$0 = f''(1) = \frac{2!}{2\pi i}\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(1-z)^3}$$

bulunur.

Problem 3.

Çözüm: 1) $2 \notin \{z : |z| < 1\}$ olduğundan,

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z + z}{z-2}\ dz = 0$$

olur.

2) $n(\gamma, 2) = 1$ (119. sayfadaki Teorem 6 nedeniyle)

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{e^z + z}{z-2}\ dz = 2\pi i(e^2 + 2)$$

bulunur.

Problem 4.

Çözüm:

$$g(z) = f(\frac{1}{z}), \quad \forall z \neq 0$$

olsun. Bu durumda g fonksiyonu $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ üzerinde analitiktir ve 0 daki tekillik kaldırılabilirdir veya h ıncı mertebeden bir kutup noktasıdır.

g nin 0 daki tekilliği kaldırılabilir ise $\lim\limits_{z\to 0} g(z)$ vardır ve sonludur, yani $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ vardır ve sonludur. Böylece f fonksiyonu $\mathbb{C}$ üzerinde sınırlıdır. f fonksiyonu, tüm düzlemde analitik ve sınırlı olduğundan, sabittir.

0 noktası h ıncı mertebeden kutup noktası ise, $\phi(z)$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ üzerinde analitik olmak üzere

$$g(z) = B_h z^{-h} + B_{h-1} z^{-h+1} + \cdots + B_1 z^{-1} + \phi(z)$$

dir. f fonksiyonu 0 da sürekli (analitik) olduğundan $\lim\limits_{z\to\infty} g(z)$ vardır ve sonludur. Böylece $\lim\limits_{z\to\infty} \phi(z)$ vardır ve sonludur. Bu nedenle $\phi(z)$ tüm düzlemde sınırlıdır ve böylece $\phi(z) = B_0$ sabittir. Bu durumda

$$f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) = B_h z^h + B_{h-1} z^{h-1} + \cdots + B_1 z + B_0$$

bir polinomdur.

Problem 5.

1. Yol: $R > 100$ olmak üzere $C : |z| = R$ alalım.

Her $m > n$ için,

$$\begin{aligned}
\left|f^{(m)}(0)\right| &= \left|\frac{m!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f\,(\xi)\,d\xi}{\xi^{m+1}}\right| \\
&\leq \frac{m!}{2\pi}\left|\int\limits_C \xi^{n-m-1}\,d\xi\right| \\
&= \frac{m!}{2\pi}\frac{R^{n-m}}{n-m} \to 0 \qquad (R\to\infty \text{ için})
\end{aligned}$$

Bu nedenle her $m > n$ için $f^{(m)}(0) = 0$ olur. Taylor açılımından,

$$\begin{aligned} f(z) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}z^{n+1} + \cdots \\ &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n \end{aligned}$$

bir polinomdur.

2. Yol: $|f(z)| < |z|^n$ olduğundan,

$$\lim_{z\to 0} z^{n+1} f(1/z) = 0$$

gerçeklendiğini biliyoruz, yani f fonksiyonu ∞ da esaslı olmayan tekilliğe sahiptir. Son problemden, f bir polinomdur.