18.112 Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar
2008 Güz

18.112 Arasınav 2 Çözümleri

Problem 1.

Çözüm:

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$$

fonksiyonu $\mathbb{C} - \{2n\pi i, n \in \mathbb{Z}\}$ de analitikdir ve $z = 2n\pi i$ noktalarında basit kutba sahiptir. Bu nedenle γ ile sınırlı bölgede, $n = 0, \pm 1$ e karşılık gelen, üç tane kutbu vardır. Buna ek olarak, her z kutup noktasında rezidüsü

$$\frac{1}{(e^z - 1)'} = \frac{1}{e^z} = 1$$

dir. Rezidü teoreminden

$$\int\limits_{\gamma} \frac{1}{e^z - 1} dz = 2\pi i \left(1 + 1 + 1\right) = 6\pi i$$

bulunur.

Problem 2.

Çözüm: $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ olsun. (66) formülünden, her $|z| < R$ için

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = R} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} u\left(\zeta\right) \frac{d\zeta}{\zeta} + iC$$

gerçeklenecek biçimde bir C sabiti vardır. Bu nedenle her $|z| < R$ için

$$f'(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\zeta| = R} \frac{u\left(\zeta\right)}{\left(\zeta - z\right)^2} d\zeta$$

olur.

Şimdi her z için,

$$\frac{|u\left(\zeta\right)|}{|\zeta|} < 1 \qquad (\text{her } |\zeta| \geq R \text{ için})$$

gerçeklenecek biçimde yeterince büyük $R > 2\,|z|$ alalım. Bu durumda

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\zeta| = R} \frac{|\zeta|}{|\zeta - z|^2} \, |d\zeta| \leq \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi R \cdot \frac{R}{\left(R/2\right)^2} = 8$$

bulunur. Böylece $f'(z)$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ üzerinde sınırlı analitik fonksiyondur. Liouville teoreminden $f'(z)$ sabittir ve bu nedenle $f(z) = az + b$ doğrusaldır.

$$\frac{u(z)}{z} \to 0$$

koşulundan $a = 0$ olduğunu görürüz, bu ise f nin sabit olduğunu ifade eder.

Dikkat!

$$\frac{\operatorname{Im} f(z)}{z} \to 0$$

olduğunu da kanıtlayabilirsiniz, böylece $z \to \infty$ iken

$$\frac{f(z)}{z} \to 0$$

olur. Bu durumda **Ara Sınav 1** deki *Problem 4* veya *Problem 5* ten, f bir polinomdur ve bu nedenle de f sabittir.

Problem 3.

Çözüm: Cauchy formülünden, $0 < r < 1$ için

$$\begin{aligned} \left|f^{(n)}(0)\right| &= \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \frac{|f(\zeta)|}{\left|\zeta^{n+1}\right|} |d\zeta| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{1}{1-r} \frac{1}{r^{n+1}} \\ &= \frac{n!}{(1-r)r^n} \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan, Cebirsel-Geometrik Ortalama Değer eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-r)\,r^n} &= \frac{1}{n^n} \frac{1}{(1-r)\,(r/n)^n} \\ &\geq \frac{1}{n^n} \left(\frac{n+1}{1 - r + \frac{r}{n} + \cdots + \frac{r}{n}} \right)^{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \end{aligned}$$

olur. Eşitlik hali ancak ve ancak

$$1 - r = \frac{r}{n}$$

yani

$$r = \frac{n}{n+1}$$

için vardır.

Böylece $f^{(n)}(0)$ için Cauchy formülünden elde edilecek en iyi tahmin

$$\left| f^{(n)}(0) \right| \leq \frac{n!\,(n+1)^{n+1}}{n^n} = (n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

bulunur.

Dikkat!

$$\frac{1}{(1-r)r^n}$$

nin türevlerini hesaplayarak, en küçük değerini de elde edebilirsiniz.

Problem 4.

Çözüm:

$$\begin{aligned} f(z) &= z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z + 1 \\ g(z) &= 6z^3 \\ h(z) &= z^7 \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda, $|z| = 1$ çemberi üzerinde

$$|f(z) - g(z)| = \left| z^7 - 2z^5 - z + 1 \right| \leq 5 < 6 = |g(z)|$$

olur ve $|z| = 2$ çemberi üzerinde

$$|f(z) - h(z)| = \left| -2z^5 + 6z^3 - z + 1 \right| \leq 115 < 128 = |h(z)|$$

olur. Böylece Rouche teoreminden, f fonksiyonu (g fonksiyonu gibi) $|z| < 1$ içinde 3 köke ve (h fonksiyonu gibi) $|z| < 2$ içinde 7 köke sahiptir.

Dikkat! Hatta $g(z) = 6z^3 + 1$ veya $g(z) = 6z^3 - z$ ve $h(z) = z^7 + 1$ vb. seçebilirsiniz.