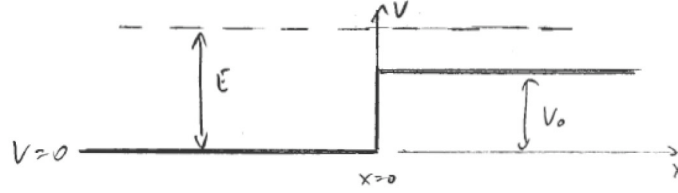


Tek Boyutlu Potansiyeller: Potansiyel eşiği



Şekil I: V_0 yüksekliğindeki potansiyel eşiği. Parçacık soldan gelmekte olup, enerjisi E dir.

Zamandan bağımsız bir durumu analiz ediyoruz ki burada iyi belirlenmiş enerjili parçacıklar akımı, engelin solundan gelmektedir. Zamandan bağımsız SD:

$$\hat{H}u(x) = Eu(x) \quad (15-1)$$

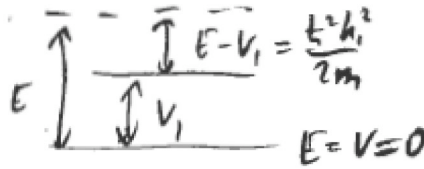
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2u}{dx^2}(x) + V(x)u(x) = Eu(x) \quad (15-2)$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)]u(x) \quad (15-3)$$

V_1 sabit bölgesi çözümlerinin niteliksel özellikleri:

Eğer $E - V_1 > 0$ ise çözümler $\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E - V_1$, k_1 gerçel olmak üzere $e^{\pm ik_1 x}$ şeklindedir.

Yorum. $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, V_1 potansiyel bölgesinde toplam enerjisi E olan bir parçacığın KE dir. Sola/ sağa hareket eden parçacıklara karşı gelen dalga fonksiyonlarıdır.

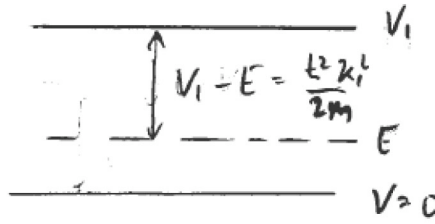


Şekil II: $E - V_1 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ bölgesindeki parçacığın kinetik enerjisi olmak üzere SD nin çözümleri düzlem dalgalar olup $e^{\pm ikx}$, burada parçacık enerjisi (sbt) potansiyelden daha büyüktür.

Eğer $E - V_1 < 0$ ise, çözümler $\frac{\hbar^2 \kappa_1^2}{2m} = V_1 - E$, κ_1 gerçel olmak üzere, $e^{\pm \kappa_1 x}$ şeklindedir.

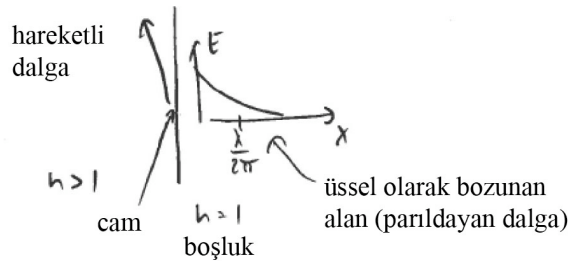
Bunlar sönümlü üssel çözümler olup, sönüm sabiti κ_1 (bozunma uzunluğu κ_1^{-1}) olup,

$\frac{\hbar^2 \kappa_1^2}{2m} = V_1 - E$, $E \rightarrow V$ iken parçacığın “kayıp” kinetik enerjisini temsil eder ve bu durumda bozunma uzunluğu κ_1^{-1} olur.



Şekil III: Parçacık enerjisinin sbt bir potansiyelden daha az olması durumundaki bölgede SD denk. nin çözümleri üssel olarak büyür ve bozunma fonksiyonları, $e^{\pm \kappa x}$ dir.

$V_1 - E = \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}$ “kayıp kinetik enerjii” bu bölgede parçacık için belirler.



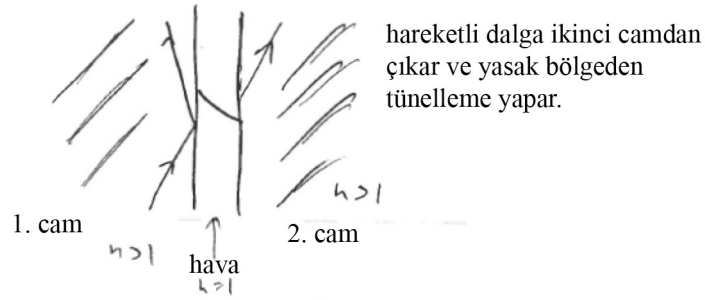
Şekil IV: Bir cam-vakum ara kesitinde bir ışık dalgası toplam iç yansımaya uğrarsa, vakum içinde parıldayan bir dalga oluşur. Toplam iç yansımaya ait kritik açıya yaklaşıp yaklaşmaz, parıldayan dalganın bozunma uzunluğu daha da artar. Bu durum klasik olarak yasaklı bir bölgeye ($V_1 > E$) giren parçacıkla aynıdır. Yasak bölge ne kadar kısa olursa, bozunma uzunluğuda o kadar uzun olur.

Not. $E < V_1$ olmak üzere “klasik yasaklı bölgede” E enerjili parçacığı bulma olasılığı sıfırdan farklıdır. Yasak bölge ne kadar az olursa ($V_1 - E$ nin küçük oluşu), parçacık yasak bölgeye daha çok nüfuz eder (bozunma uzunluğu κ_1^{-1} daha uzun olur). Bu olay cam içinde vuku bulan toplam iç yansımaya benzer ve olay bir cam-boşluk arakesitinde oluşur.

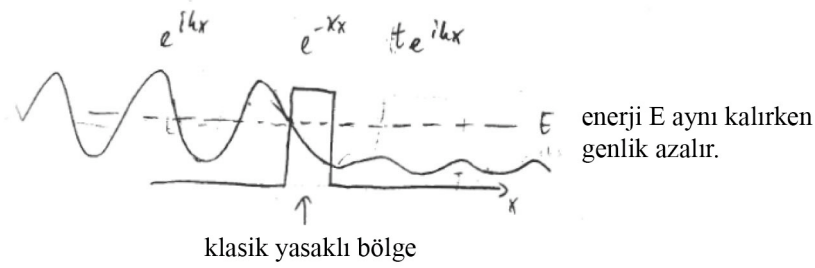
Işık alanı “yasak bölge” de sıfırdan farklı bir genliğe sahiptir. Bunu nasıl biliyoruz? İkinci bir prizma ile yaklaşalım. Parıldayan (sönümlü) alan boşlukta olur ve ikinci prizmada hareketli bir dalgaya tekrar dönüşür.

Benzer şekilde, enerjisi engeli aşamayacak kadar yetersiz ise, **parçacık bir potansiyel engelinden tünelleme yapabilir.**

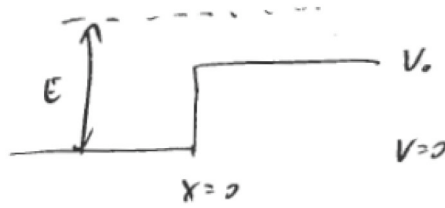
Potansiyel eşiğine tekrar dönersek, $E > V_0$ kabul ederek şunları tanımlayalım:



Şekil V: Yasaklı bölgeden “tünelleme” yapan ışık alanı, ikinci prizmanın diğer yanından çıkarken gözlemlenebilir.



Şekil VI: Parçacık engelden tünelleme yaparak, diğer taraftan çıkarken E enerjisi ve deBroglie dalga boyu $2\pi/k$ aynı kalır. Çıkan dalganın genliği, geleninkinden daha küçüktür.



Şekil VII: Potansiyel Eşiği

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E \quad (x < 0 \text{ 'deki KE}) \quad (15-4)$$

$$\frac{\hbar^2 q^2}{2m} = E - V_0 \quad (x > 0 \text{ 'deki KE}) \quad (15-5)$$

En genel çözüm:

$$Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad x < 0 \text{ bölgesinde} \quad (15-6)$$

$$Ce^{iqx} + De^{-iqx} \quad x > 0 \text{ bölgesinde} \quad (15-7)$$

Soldan gelen ($A \neq 0$) bir parçacığını bir başlangıç şartı olarak seçersek, bu takdirde parçacık sağ tarafa doğru geçirebilir ($C \neq 0$) veyahut göreceğimiz gibi, $E > V_0$ olmasına rağmen ($B \neq 0$) engelden kısmen yansıtılır. Ancak, sağdan herhangi bir parçacık gelmezse, $D = 0$ olur.

Parçacık akımını (veyahut akıyı) hesaplırsak

$x < 0$ bölgesinde:

$$j_{<} = \frac{\hbar}{2im} \left(u^* \frac{du}{dx} - \left(\frac{du^*}{dx} \right) u \right) \quad (15-8)$$

$$= \frac{\hbar}{2im} [(A^* e^{-ikx} + B^* e^{ikx}) (ikAe^{ikx} - ikBe^{-ikx}) - \text{c.c.}] \quad (15-9)$$

$$= \frac{\hbar k}{2m} [|A|^2 + AB^* e^{2ikx} - A^* B e^{-2ikx} - |B|^2 - \text{c.c.}] \quad (15-10)$$

$$= \frac{\hbar k}{m} [|A|^2 - |B|^2] \rightarrow x < 0 \text{ için net akım} \quad (15-11)$$

Yansıma genliğini $r = \frac{B}{A}$ ve yansıma katsayısını $R = |r|^2 = \left| \frac{B}{A} \right|^2$ olarak tanımlayalım.

$x > 0$ için:

$$j_{>} = \frac{\hbar q}{m} |C|^2 \quad (15-12)$$

$x = 0$ 'daki dalga fonk.'nın sürekliliğinden:

$$\psi(x \rightarrow 0) = A + B = \psi(x \leftarrow 0) = C \quad (15-13)$$

Potansiyel eşiğine rağmen, dalga fonk. nun türevide sürekli olmalıdır:

$$\left(\frac{du}{dx} \right)_{x=\epsilon} - \left(\frac{du}{dx} \right)_{x=-\epsilon} = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right) \quad (15-14)$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx [E - V(x)] u(x) = 0 \quad (15-15)$$

İlerideki uygulamalar için, eğer potansiyel bir delta fonk. terimini içerirse $\lambda \delta(x-a)$, bu takdirde λ fonk.'nun bir büyüklüğü ile aynı hesaplama yapılırsa,

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=a+\epsilon} - \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=a-\epsilon} = \frac{2m}{\hbar^2} \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} dx \lambda \delta(x-a) u(x) \quad (15-16)$$

$$= \frac{2m}{\hbar^2} \lambda u(a) \quad (15-17)$$

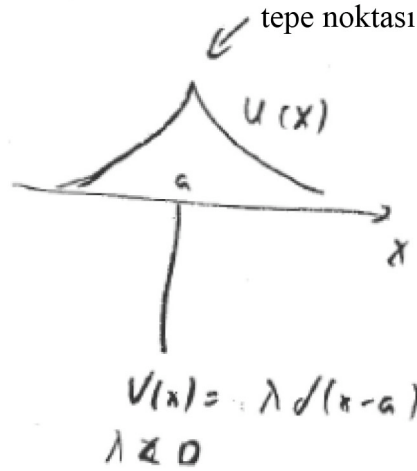
bulunur. Özetlersek, şu kuralları elde ederiz:

Kural 1. $u(x)$ dalga fonksiyonu daima süreklidir.

Kural 2. Potansiyel δ - fonk. gibi terimleri içermez ise, dalga fonk.'nun birinci konumsal türevi $\frac{du}{dx}$ sürekli olur.

Kural 2.1. Potansiyel $\lambda \delta(x-a)$ gibi bir terimi bulundurur ise, birinci türev $\frac{du}{dx}$, $x = a$ 'da süreksiz olup, şu bağıntıyı sağlar:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=a+\epsilon} - \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=a-\epsilon} = \frac{2m}{\hbar^2} \lambda u(a) \quad (15-18)$$



Şekil VIII: Dalga fonksiyonunun süreksizliği bir delta fonk. potansiyelinde oluşur. Dalga fonksiyonu eğimlerindeki farklar δ potansiyelinin şiddeti ve dalga fonk.'nun tepe noktasındaki değeriyle orantılıdır.

$$\psi \text{ 'nin sürekliliği:} \quad A + B = C \quad (15-19)$$

$$\psi' \text{ 'nin sürekliliği:} \quad ik(A - B) = iqC \quad (15-20)$$

B , C yi A cinsinden çözelim

$$C = A + B = \frac{k}{q}(A - B) \quad (15-21)$$

$$A \left(1 - \frac{k}{q}\right) = -B \left(1 + \frac{k}{q}\right) \quad (15-22)$$

$$A \frac{q - k}{q} = -B \frac{q + k}{q} \quad (15-23)$$

$$B = \frac{k - q}{k + q} A \quad (15-24)$$

$$C = A + B = A + \frac{k - q}{k + q} A = \frac{2}{k + q} A \quad (15-25)$$

Yansıma genliği $r = \frac{B}{A} = \frac{k - q}{k + q} \quad (15-26)$

Geçirme genliği $t = \frac{C}{A} = \frac{2k}{k + q} \quad (15-27)$

Yansıma katsayısı $|r|^2 = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \left(\frac{k - q}{k + q}\right)^2 \quad (15-28)$

Geçirme katsayısı $|t|^2 = \left|\frac{C}{A}\right|^2 = \frac{4k^2}{(k + q)^2} \quad (15-29)$

Yansıma akımı $j_{\leftarrow} = \frac{\hbar k}{m} |B|^2 = \frac{\hbar k}{m} \left(\frac{k - q}{k + q}\right)^2 |A|^2 \quad (15-30)$

Geçirme akımı $j_{\rightarrow, x>0} = \frac{\hbar q}{m} |C|^2 = \frac{\hbar k}{m} \frac{4kq}{(k + q)^2} |A|^2 \quad (15-31)$

$x < 0$ için net akım $j_{<} = \frac{\hbar k}{m} (|A|^2 - |B|^2) = \frac{\hbar k}{m} |A|^2 \frac{4kq}{(k + q)^2} \quad (15-32)$

$x > 0$ için net akım $j_{>} = \frac{\hbar q}{m} |C|^2 = \frac{\hbar k}{m} \frac{4kq}{(k + q)^2} |A|^2 \quad (15-33)$

Akım süreklilik denk.ne tabidir (bkz. problem kümesi)

$$\frac{\partial j}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 = 0 \quad (15-34)$$

Biz burada kararlı durumlarla, $\frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 = 0$, ilgileniyoruz (zamanla olasılık yoğunluğunda değişme olmaz.) $\Rightarrow j = \text{sbt. olup, akım potansiyel eşiğinde sürekli olur,}$

$$j_{<} = j_{>}, \quad (15-35)$$

veyahut

$$j_{\text{gelen}} = j_{\rightarrow, x < 0} = \frac{\hbar k}{m} |A|^2 = j_{\text{yansıyan}} + j_{\text{geçirilen}} \quad (15-36)$$

$$= j_{\leftarrow, x < 0} + j_{\rightarrow, x > 0} \quad (15-37)$$

$$= \frac{\hbar k}{m} |B|^2 + \frac{\hbar q}{m} |C|^2. \quad (15-38)$$

Not. $|r|^2 + |t|^2 \neq 1$ dir zira parçacık hızının, $x > 0$ için değeri, $x < 0$ için değerinden farklıdır.

Sonuçların tartışılması

Klasik mekaniğin aksine, parçacığın enerjisi potansiyel engelini aşmaya yeterli olsa bile, onun az da olsa yansıma olasılığı vardır. Bu durum optikteki bir kırınım indisindeki basamak değişme (örneğin, hava-cam arakesiti) ile aynıdır. Parçacığın yansıması, dalga fonk. ve türevinin sınırdaki çakışmasının bir sonucudur. Yine, bu durum optikteki benzer olup, burada bazı e.m. alanlarının sınırdaki yansıma alanı meydana getirmesiyle aynıdır.

Not. Potansiyelin çok düzgün değişmesi durumunda (veya optikte kırınım indisi) yansıma yoktur. Düzgün olan nedir? Birçok dalgaboyu üzerinde bir değişme. Potansiyelin, $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ dalga boyuna göre kıyaslandığında kısa bir l mesafesinde değişme göstermesi, yansımayla sonuçlanır. Eğer parçacığın enerjisi engel yüksekliğini geçerse, çoğu büyük λ üzerine potansiyelin yavaş değişimi yansıma meydana getirmez.



Şekil IX: Eğer parçacığın enerjisi engeli aşmaya yeterli ise, birçok deBroglie dalgaboyu boyunca düzgün değişen bir potansiyel kısmi yansıma meydana getiremez.

$l \sim \lambda$ ara bölgesi: burada rezonans olayı bekleriz (parçacık enerjisiyle yansıma olasılığında tekdüze olmayan değişmelerin vuku bulması). Potansiyel eşiği için yansıma katsayısı,

$$|r|^2 \rightarrow 0 \quad k \rightarrow q \text{ için} \quad (E \gg V_1), \text{ ve} \quad (15-39)$$

$$|r|^2 \rightarrow 1 \quad q \rightarrow 0 \text{ için} \quad (E \gg V_1), \text{ için} \quad (15-40)$$

$$(15-41)$$

Yansıma olasılığı ilginç olarak şöyle yazılabilir

$$|r|^2 = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E - V_1}}{\sqrt{E} + \sqrt{E - V_1}} \right)^2 \quad (15-42)$$

yani, olasılık $\hbar$ 'a açıkça bağımlı değildir. Ancak, yansıma hala yapısından ötürü klasik olmayıp, burada potansiyel deBroglie parçacık dalga boyuyla kıyaslandığında ani değişme gösterir ve bu da $\hbar$ 'a bağımlıdır.

$E < V_0$ **çözümü**: Tanım yaparsak

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E \quad (x < 0 \text{ için KE}) \quad (15-43)$$

$$\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} = V_0 - E \quad (\text{"kayıp KE engeli aşmak için"}) \quad (15-44)$$

En genel çözüm

$$Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad x < 0 \text{ için} \quad (15-45)$$

$$Ce^{-\kappa x} + De^{\kappa x} \quad x > 0 \text{ için} \quad (15-46)$$

$e^{+\kappa x}$ terimi normalize edilemez, $D = 0$.

Daha önce yaptığımız gibi $x = 0$ 'da $\psi_1 \psi_1'$ 'in sürekliliğini kullanarak aynı süreci yaşarsak veyahut $q \rightarrow i\kappa$ ($Ce^{iqx} \rightarrow Ce^{-\kappa x}$ olur) önceki hesabımızı kullanırsak,

Sonuç olarak,

$$|r|^2 = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \left| \frac{k - i\kappa}{k + i\kappa} \right|^2 = \frac{k^2 + \kappa^2}{k^2 + \kappa^2} = 1 \quad (15-47)$$

$$|t|^2 = \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \left| \frac{2k}{k + i\kappa} \right|^2 = \frac{4k^2}{k^2 + \kappa^2} \neq 0 \quad (15-48)$$

$$(15-49)$$

Dalga'nın bir kısmı engeli delip geçerken bu niçin "geçiş" genliğinin kaybolmadığını açıklar. Ancak, bununla ilgili bir parçacık akımı yoktur: $Ce^{-\kappa x}$ konumsal değişen bir faza sahip olmadığından, parçacık akımı

$$j = \frac{\hbar}{2im} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \text{c.c.} \right) \quad (15-50)$$

$x > 0$ için yok olur

$$j_{<} = \frac{\hbar k}{m}(|A|^2 - |B|^2) = 0 \quad (15-51)$$

$$j_{>} = 0 \quad (15-52)$$

Kararlı durumda tüm parçacıklar yansıtıldığından net akım sıfır olur.

Not. Yansıyan dalga, enerji bağımlı bir faz kaymasına sahiptir.

$$r = \frac{B}{A} = \frac{k - i\kappa}{k + i\kappa} \quad (15-53)$$

$$= \frac{(k - i\kappa)^2}{k^2 + \kappa^2} \quad (15-54)$$

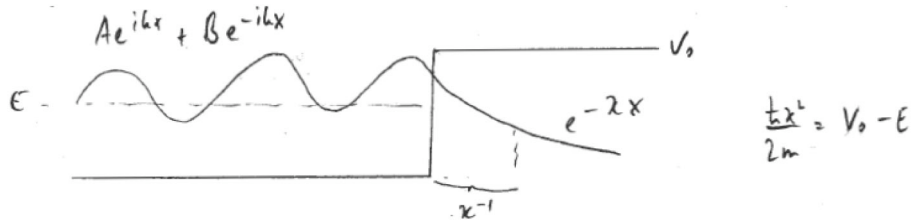
$$= \frac{k^2 - \kappa^2 - 2ik\kappa}{k^2 + \kappa^2} \quad (15-55)$$

$$= e^{i\phi} \quad (15-56)$$

olup, $\tan \phi = -\frac{2k\kappa}{k^2 - \kappa^2}$ dir.

Dalga'nın faz kayması 3 boyutlu saçınma problemlerinde önemlidir.

Parçacığı yasak bölgede yerleştirebilir miyiz?



Şekil X: $E < V_0$ için dalga fonk, $x > 0$ yasak bölgesine nüfuz eder. Parçacık burada gözlemlenebilir mi?

Parçacığı engel içinde ölçme hususunda, yani engel dışında ölçmemekten emin olabilmek için onun konumunu en azından $\Delta x \approx \kappa^{-1}$ hassasiyetiyle ölçmek zorundayız. Bundan dolayı Heisenberg belirsizliğine göre, $\Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x} \sim \hbar \kappa$ 'yı aşan bir momentum çarpışmasında aktarımın parçacığın olacağı aşıkardır.

Ne kadar enerji aktarmış oluruz?

$$\Delta E = E(p + \Delta p) - E(p) \quad (15-57)$$

$$= \frac{(p + \Delta p)^2}{2m} - \frac{p^2}{2m} \quad (15-58)$$

$$= \frac{p\Delta p}{m} + \frac{(\Delta p)^2}{2m} \quad (15-59)$$

$$p = \hbar k \quad (15-60)$$

$p\Delta p$ pozitif veya negatif olabilir, $(\Delta p)^2$ ise daima pozitiftir. Ortalama enerji aktarımı

$$\langle \Delta E \rangle = \frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m(\Delta x)^2} = \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} = V_0 - E \quad (15-61)$$

Heisenberg belirsizlik ilkesine göre, parçacığı engel içinde yerleştiren ölçüm, parçacığa yeterince enerji aktarır ve onun orada yerleşmesini sağlar.

Kural. $E - V_l > 0$ olan bir pozitif KE, hız katsayısı k (veya salınma periyodu $\lambda = \frac{2\pi}{k}$) olan konumsal salınan bir dalga fonk. $e^{\pm ikx}$ ’e karşı gelir. $E - V_l < 0$ olan bir negatif (“kayıp”) KE konumsal sönümlenen veyahut büyüyen dalga fonk. $e^{\pm \kappa x}$ ’e karşılık gelir ki burada κ sönüm hızı sabitidir (sönüm uzunluğu κ^{-1} dir).

“Kayıp” KE bu bölgenin büyüklüğü ile (κ^{-1}) ilgili olup, parçacık klasik olarak yasaklı bölgede bulunur.