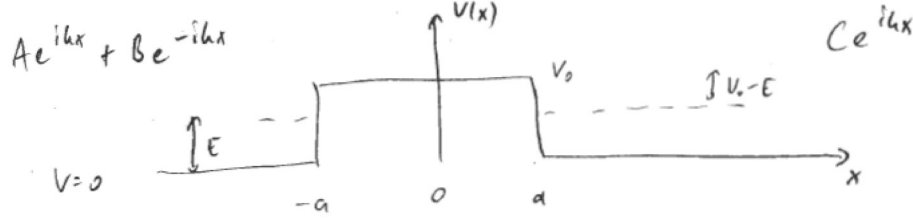


Potansiyel Engeli: Tünelleme



Şekil I: Bir potansiyel engelinde tünelleme

$E < V_0$ olsun (klasik olarak parçacık yansıtılmıştır). SD'nin engel dışındaki çözümleri

Soldan gelen dalga: $u(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ $x < -a$ için (16-1)

ve $u(x) = Ce^{ikx}$ $x > a$ için (16-2)

Sağdan gelen dalga: $u(x) = De^{-ikx}$ $x > a$ için (16-3)

olup, burada sağdan gelen bir dalga şekline karşı gelen De^{-ikx} terimini ihmal etmiş bulunuyoruz. Engelin içinde SD

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) = +\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)u(x) = \kappa^2u(x) \quad (16-4)$$

olur, burada $\kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$ dir. Daha önceki gibi κ , klasik olarak yasaklanmış bölgede sönüm sabitidir (κ^{-1} sönüm uzunluğu) ve bu engeli klasik olarak aşmak için gerekli olan “kayıp” KE dir, yani $\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m} = V_0 - E$. Sonuç olarak engel içinde

$$u(x) = Ee^{-\kappa x} + Fe^{\kappa x}, \text{ for } |x| \leq a \quad (16-5)$$

olur. Daha öncede yaptığımız gibi, $u(x)$ çözümü ve türevi $u'(x)$ 'i sınırlarda karşılaştırmak zorundayız.

• $x = -a$:

$$Ae^{-ika} + Be^{ika} = Ee^{+\kappa a} + Fe^{-\kappa a} \quad u \text{ için} \quad (16-6)$$

$$+ikAe^{-ika} - ikBe^{ika} = +\kappa Ee^{+\kappa a} + \kappa Fe^{-\kappa a} \quad u' \text{ için} \quad (16-7)$$

• $x = a$:

$$Ce^{ika} = Ee^{-\kappa a} + Fe^{\kappa a} \quad u \text{ için} \quad (16-8)$$

$$ikAe^{ika} = -\kappa Ee^{-\kappa a} + \kappa Fe^{\kappa a} \quad u' \text{ için} \quad (16-9)$$

Engeldeki yansıma katsayısı $r = \frac{B}{A}$ (veyahut yansıma olasılığı $|r|^2 = \left|\frac{B}{A}\right|^2$) ve geçirme genliği $t = \frac{C}{A}$ (veyahut geçirgenlik olasılığı $|t|^2 = \left|\frac{C}{A}\right|^2$) ile ilgilenmiştik. $|A|^2$ nin gelen akım ve serbest bir değişken olduğunu hatırlayalım. u' denk.ni u denk.ne doğrudan bölmek faydalı olabilir (veya farklı olarak, $\frac{1}{u(x)} \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} (\ln u(x))$ çakıştırmak gerekir). Böylece

• $x = -a$ da:

$$\frac{+ikAe^{-ika} - ikBe^{+ika}}{Ae^{-ika} + Be^{ika}} = \frac{-\kappa Ee^{\kappa a} + \kappa Fe^{-\kappa a}}{Ee^{\kappa a} + Fe^{-\kappa a}} \quad (16-10)$$

• $x = a$ da:

$$ik = \frac{+ikCe^{ika}}{Ce^{ika}} = \frac{-\kappa Ee^{-\kappa a} + \kappa Fe^{\kappa a}}{Ee^{-\kappa a} + Fe^{\kappa a}} \quad (16-11)$$

($\frac{d}{dx} (\ln u(x)) = \frac{1}{u(x)} \frac{du}{dx}$ sınırlarındaki çakışmalar).

Şimdi E, F yi yok etmek üzere devam edelim (Denk. 16-11):

$$ikEe^{-\kappa a} + ikFe^{\kappa a} = -\kappa Ee^{-\kappa a} + \kappa Fe^{\kappa a} \quad (16-12)$$

$$(\kappa + ik)Ee^{-\kappa a} = (\kappa - ik)Fe^{\kappa a} \quad (16-13)$$

$$E = \frac{\kappa - ik}{\kappa + ik} Fe^{2\kappa a} \quad (16-14)$$

Denk. 16-10'da yerine yazılırsa

$$\text{Denk. sağ yanı} = \frac{-\kappa \frac{\kappa - ik}{\kappa + ik} Fe^{3\kappa a} + \kappa Fe^{-\kappa a}}{\frac{\kappa - ik}{\kappa + ik} Fe^{3\kappa a} + Fe^{-\kappa a}} \quad (16-15)$$

$$= \frac{-\kappa(\kappa - ik)e^{+2\kappa a} + \kappa(\kappa + ik)e^{-2\kappa a}}{(\kappa - ik)e^{2\kappa a} + (\kappa + ik)e^{-2\kappa a}} \quad (16-16)$$

$$= \frac{-\kappa^2(e^{2\kappa a} - e^{-2\kappa a}) + ik\kappa(e^{2\kappa a} + e^{-2\kappa a})}{\kappa(e^{2\kappa a} + e^{-2\kappa a}) - ik(\kappa(e^{2\kappa a} - e^{-2\kappa a}))} \quad (16-17)$$

$$= -\frac{\kappa^2 \sinh(2\pi a) + ik\kappa \cosh(2\kappa a)}{\kappa \cosh(2\kappa a) - ik \sinh(2\kappa a)} \quad (16-18)$$

Sonuçta Denk. 16-10

$$[+ikAe^{-ika} - ikBe^{ika}] [\kappa \cosh(2\kappa a) - ik \sinh(2\kappa a)] \quad (16-19)$$

$$= [Ae^{-ika} + Be^{ika}] [-\kappa^2 \sinh(2\kappa a) + ik\kappa \cosh(2\kappa a)] \quad (16-20)$$

$$= Ae^{-ika} (+ik\kappa \cosh(2\kappa a) + k^2 \sinh(2\kappa a) + \kappa^2 \sinh(2\kappa a) - ik\kappa \cosh(2\kappa a)) \quad (16-21)$$

$$= Be^{ika} (+ik\kappa \cosh(2\kappa a) + k^2 \sinh(2\kappa a) - \kappa^2 \sinh(2\kappa a) + ik\kappa \cosh(2\kappa a)) \quad (16-22)$$

$$Ae^{-ika} [(k^2 + \kappa^2) \sinh(2\kappa a)] = Be^{ika} [2ik\kappa \cosh(2\kappa a) + (k^2 - \kappa^2) \sinh(2\kappa a)] \quad (16-23)$$

olarak yazılır.

$$r = \frac{B}{A} \quad (16-24)$$

$$= e^{-2ika} \frac{(k^2 + \kappa^2) \sinh(2\kappa a)}{2ik\kappa \cosh(2\kappa a) + (k^2 - \kappa^2) \sinh(2\kappa a)} \quad (16-25)$$

ise engelden yansıma genliğidir.

$\frac{C}{A}$ geçirgenlik katsayısını hesaplamak için, u 'nun $x = a$ 'daki sürekliliğini kullanınız

$$Ce^{ika} = Ee^{-\kappa a} + Fe^{+\kappa a} \quad (16-26)$$

$$= \frac{\kappa - ik}{\kappa + ik} Fe^{\kappa a} + Fe^{\kappa a} \quad (16-27)$$

$$= \frac{2\kappa}{\kappa + ik} Fe^{\kappa a} \quad (16-28)$$

u 'nun $x = -a$ 'daki sürekliliğinden F yi bulabiliriz:

$$\text{SAĞ YAN} = Ee^{\kappa a} + Fe^{-\kappa a} \quad (16-29)$$

$$= \frac{\kappa - ik}{\kappa + ik} Fe^{3\kappa a} + Fe^{-\kappa a} \quad (16-30)$$

$$= Fe^{\kappa a} \left[\frac{\kappa - ik}{\kappa + ik} e^{2\kappa a} + \frac{\kappa + ik}{\kappa + ik} e^{-2\kappa a} \right] \quad (16-31)$$

$$= Fe^{\kappa a} \frac{2\kappa \cosh(2\kappa a) - 2ik \sinh(2\kappa a)}{\kappa + ik} \quad (16-32)$$

$$\text{SAĞ YAN} = Ae^{-ika} + Be^{ika} \quad (16-33)$$

$$= Ae^{-ika} + Ae^{-ika} \frac{(k^2 + \kappa^2) \sinh(2\kappa a)}{2ik\kappa \cosh(2\kappa a) + (k^2 - \kappa^2) \sinh(2\kappa a)} \quad (16-34)$$

$$= Ae^{-ika} \left[1 + \frac{(k^2 + \kappa^2) \sinh(2\kappa a)}{2ik\kappa \cosh(2\kappa a) + (k^2 - \kappa^2) \sinh(2\kappa a)} \right] \quad (16-35)$$

$$= Ae^{-ika} \frac{2ik\kappa \cosh(2\kappa a) + 2k^2 \sinh(2\kappa a)}{2ik\kappa \cosh(2\kappa a) + (k^2 - \kappa^2) \sinh(2\kappa a)}. \quad (16-36)$$

Bu takdirde,

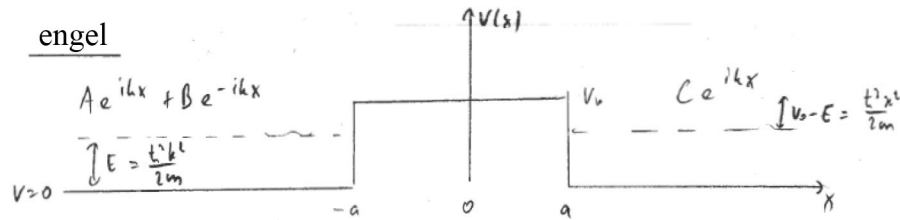
$$\frac{C}{A} = \frac{2\kappa}{A} \frac{F}{\kappa + ik} e^{\kappa a - ika} \quad (16-37)$$

$$= \frac{2\kappa}{A} \frac{Ae^{-2ika}}{2\kappa \cosh(2\kappa a) - 2ik \sinh(2\kappa a)} \frac{(2ik\kappa \cosh(2\kappa a) + 2k^2 \sinh(2\kappa a))}{2ik\kappa \cosh(2\kappa a) + (k^2 - \kappa^2) \sinh(2\kappa a)} \quad (16-38)$$

$$= 2\kappa e^{-2ika} ik \frac{1}{2ik\kappa \cosh(2\kappa a) + (k^2 - \kappa^2) \sinh(2\kappa a)} \quad (16-39)$$

$$= \frac{C}{A} \quad (16-40)$$

$$= e^{-2ika} \frac{2k\kappa}{2k\kappa \cosh(2\kappa a) - i(k^2 - \kappa^2) \sinh(2\kappa a)} \quad (16-41)$$

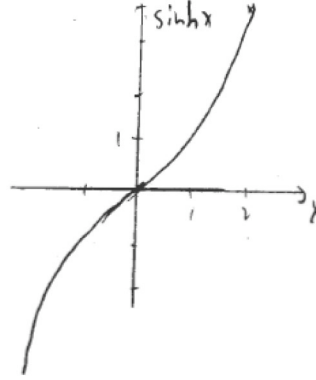


Şekil II: Potansiyel engelinde tünelleme

Sonuç olarak, **engeldeki sonuçlar** şöyle yazılabilir.

- $\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E$
- $\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} = V_0 - E$
- $r = \frac{B}{A} = e^{-2ika} \frac{-i(k^2 + \kappa^2) \sinh(2\kappa a)}{2k\kappa \cosh(2\kappa a) - i(k^2 - \kappa^2) \sinh(2\kappa a)}$
- $t = \frac{C}{A} = e^{-2ika} \frac{2k\kappa}{2k\kappa \cosh(2\kappa a) - i(k^2 - \kappa^2) \sinh(2\kappa a)}$

Engelin her iki yanında enerji ve parçacık hızı aynı olduğundan burada $|r|^2 + |t|^2 = 1$ olur.



Şekil III: sinh fonksiyonu

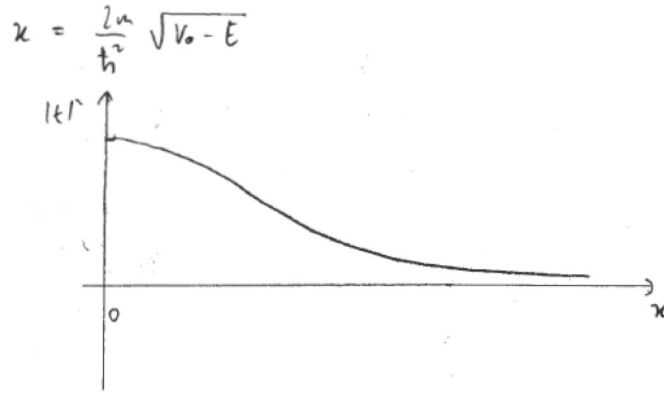
Şimdi $|t|^2$ ye bakalım

$$|t|^2 = \frac{(2k\kappa)^2}{(2k\kappa)^2 + (k^2 + \kappa^2)^2 \sinh^2(2\kappa a)} \quad (16-42)$$

olup, burada $\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$ eşitliğini kullandık. sinh monoton artan bir fonksiyon ve $\kappa = \frac{2m}{\hbar^2} \sqrt{V_0 - E}$ olduğundan, geçiş V_0 engel yüksekliği ile monoton bir şekilde azalma gösterir.

$\kappa a \gg 1$ çok az geçiş olması limit durumunda (yani sönüm uzunluğu κ^{-1} 'e kıyasla engel genişliği fazla olması), $\sinh(2\kappa a) \approx \left(\frac{1}{2}e^{2\kappa a}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{4\kappa a}$ ve $|t|^2 \rightarrow \left(\frac{4k\kappa}{k^2 + \kappa^2}\right)^2 e^{-4\kappa a}$ olur. Bu limit durumunda tünelleme olasılığı engel kalınlığı ile üssel olarak azalma gösterir (ve bu sönüm uzunluğu κ^{-1} cinsindendir).

→ Bu üssel bağımlılık kararsız çekirdeklerin ömür sürelerindeki oldukça fazla değişmeyi açıklayabilir (μ s ila 10^9 yıl arası bir süre olup, 10^{22} 'ye varan bir değişmeye karşı gelir).

Şekil IV: Sönüm dalga vektörü κ 'nın fonk. olarak engelden geçiş

Şekil V: Yüksek veya geniş engel limitinde geçiş üssel olarak azalır zira engel içindeki dalga fonk.'da üssel bozunan terim hakimdir.

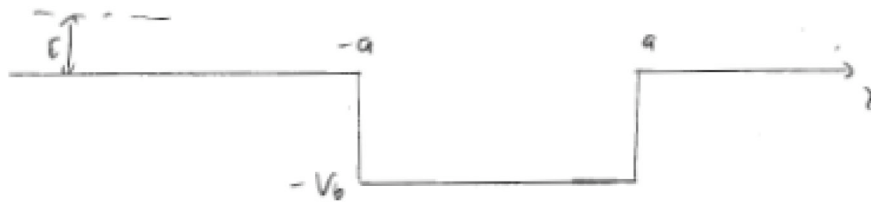
Potansiyel Kuyusu: Rezonans Olayı

İlk olarak saçınma ($E > 0$) gözönüne alınırsa,

$$x \leq -a : \quad Ae^{ikx} + B^{-ikx} \quad (16-43)$$

$$a \leq x \leq a : \quad Ee^{+iqx} + Fe^{-iqx} \quad (16-44)$$

$$x \geq a : \quad Ce^{ikx} \quad (16-45)$$



Şekil VI: Potansiyel kuyusu

- $\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E$
- $\frac{\hbar^2 q^2}{2m} = V_0 + E$

Hesaplamaları yeniden yapmak yerine, $\kappa \rightarrow -iq$ değişimi yapılırsa bu denklemlerin ($E < V_0$) potansiyel engeline eşdeğer olduklarını dikkate almalıyız. Sonuçta

$$r = ie^{-2ika} \frac{(q^2 - k^2) \sin(2qa)}{2kq \cos(2qa) - i(q^2 + k^2) \sin(2qa)} \quad (16-46)$$

$$t = e^{-2ika} \frac{2kq}{2kq \cos(2qa) - i(q^2 + k^2) \sin(2qa)} \quad (16-47)$$

elde ederiz.

Potansiyel kuyusu için, engelden tünelleme yapmak yerine, yansıma ve geçirme $2qa$ değişkeninin bir fonksiyonu olarak salınırlar. Yani, a genişlikli kuyu içerisinde $\frac{2\pi}{q}$ deBroglie dalga boylarının bir fonksiyonu olarak bu durum gerçekleşir. Özellikle, aşağıdaki değerler için

$$2q_n a = n\pi \quad \rightarrow \quad n \text{ tamsayı} \quad (16-48)$$

$$q_n = \frac{n\pi}{2a} \quad (16-49)$$

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{q} = \frac{4a}{n} \quad (16-50)$$

yansıma sıfıra doğru gider zira, $-a$ ve $+a$ arasında yansıyan dalgalar arasında yıkıcı bir girişim oluşur. Bu durum optikteki bir Fabry-Perot rezonans şartına karşı gelir. Bu olay 3 boyutta da devam eder ve asal gaz atomlarından elektron saçılmaları olayında buna Ramsaner- Townsend rezonansı denilir. Buna benzer biro lay ultra soğuk atomların çarpışmasında gözlemlenmiştir. Burada atomlar arası potansiyel V_0 'ın etkin derinliği bir manyetik alanla ayarlanır. Burada (ve nükleer çarpışmalarda) olaya Feshbach rezonansı adı verilir.

Çekici δ -potansiyelinde bağlı durumlar

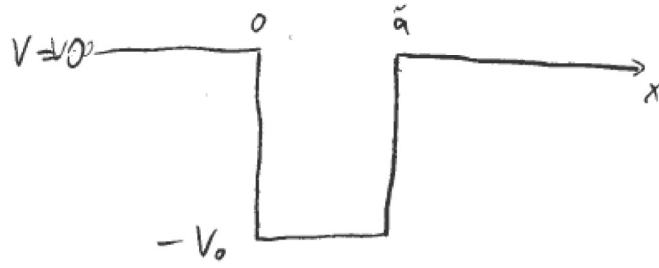
Potansiyel kuyusunda $-V_0 < E < 0$ negatif enerjileri için neler olur?

En azından eğer potansiyel yeterince derinse, kesikli bağlı durumlar beklenir. Özellikle basit matematiksel bir limit durumu, potansiyelin büyüklüğünü azaltmak suretiyle derinliğini de arttırmakla, derinlik ve genişlik çarpımı sabitleştirilir.

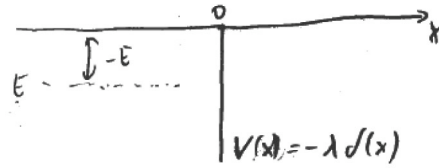
$\tilde{a} \rightarrow 0$ iken $V_0 \rightarrow \infty$ olur öyle ki $\tilde{a} \cdot V_0 = \text{sbt} = \lambda > 0$ olur. Bundan sonra çekici delta potansiyeli $V(x) = -\lambda \delta(x)$ elde edilir. $E < 0$ bağlı durumlarını ele alabiliriz.

$$\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} = 0 - E = -E = |E|, \quad \kappa > 0 \quad (16-51)$$

tanımlaması yapalım.



Şekil VII: Potansiyel kuyusu yeterince derin ve geniş ise, $-V_0 < E < 0$ kesikli enerjilerine sahip durumları destekler.



Şekil VIII: Çekici delta potansiyeli

- Çözümler $x < 0$:

$$Ae^{\kappa x} + \underbrace{B^{-\kappa x}}_{x \rightarrow -\infty \text{ için iraksar.}} \quad (16-52)$$

- Çözümler $x > 0$:

$$Ce^{\kappa x} + D^{-\kappa x} \quad (16-53)$$

- Dalga fonk. sürekliliği $x = 0$:

$$A = D \quad (16-54)$$

- Türevin tabi (Ders XV) olması ise,

$$u'(\epsilon) - u'(-\epsilon) = -\frac{2m}{\hbar^2} \lambda u(0) \quad (16-55)$$

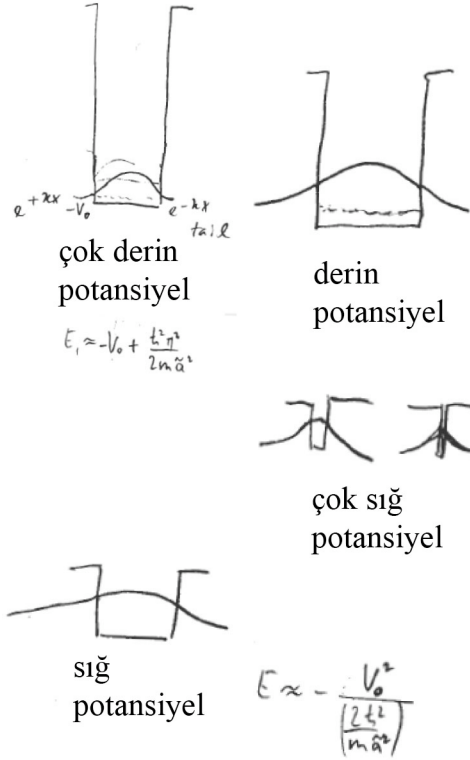
$$\kappa D - \kappa A = -\frac{2m}{\hbar^2} \lambda A \quad (16-56)$$

$$-2\kappa = -\frac{2m}{\hbar^2} \lambda \quad (16-57)$$

$$\kappa_1 = \frac{m}{\hbar^2} \lambda \quad (16-58)$$

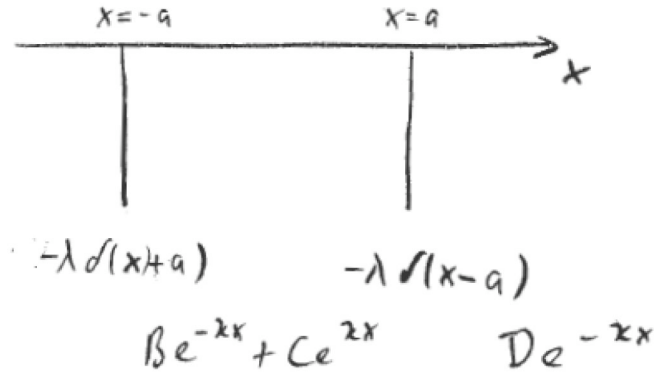
$$E_1 = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} = -\frac{\hbar^2 m^2}{2m \hbar^4} \lambda^2 = -\frac{m}{2\hbar^2} \lambda^2 \quad (16-59)$$

→ Çekici δ -fonk için bağlanma enerjisi. δ potansiyeli tamı tamamına



Şekil IX: Potansiyelin çok derinden çok sığ durumuna dönüşümünde bağlı durumların kıyaslanması. Çok derin potansiyelde, sonsuz kuyuda olduğu gibi, dalga fonk. kuyu içinde sinusoidal şekilde salınır ve yasak bölgede üssel olarak sönümlenir. Çok sığ potansiyel durumunda ise, dalga fonk. kuyu dışında “yasak” bölgede muhtemelen yerleşir.

bir $E = -\frac{m\lambda^2}{2\hbar^2}$ için tek bağlı durumuna sahiptir. Sonlu büyüklükteki bir kuyu için bu sonuç, enerjisi $E = -\frac{m a^2}{2\hbar^2} V_0^2$ olan tek bir bağlı durumu ($V_0 \ll \frac{2\hbar^2}{m a^2}$) zayıf bir potansiyel limit durumuna karşı gelir.



Şekil X: Farklı bölgelerdeki çözümler

İki tane çekici δ -potansiyeli

Önceki gibi hareket ederek veyahut potansiyelin $x \rightarrow -x$ 'de simetrik olduğunu kullanarak belirli parite için çözümleri bekleyebilirdik. Orta bölgedeki çift çözüm $2B \cosh(\kappa x)$ ve $A = D$ olup, iki parametre ortadan kalkar.

- u 'nun sürekliliği

$$2B \cosh(\kappa a) = A e^{-\kappa a} \quad (16-60)$$

- türev

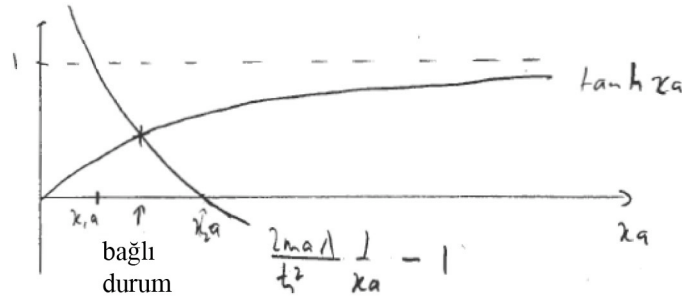
$$-\kappa A e^{-\kappa a} - \kappa 2B \sinh(\kappa a) = -\frac{2m}{\hbar^2} \lambda A e^{-\kappa a} \quad (16-61)$$

$$\left(\frac{2m}{\hbar^2} \lambda - \kappa \right) A e^{-\kappa a} = 2\kappa B \sinh(\kappa a) \quad (16-62)$$

$$\left(\frac{2m}{\hbar^2} \lambda - \kappa \right) 2B \cosh(\kappa a) = 2\kappa B \sinh(\kappa a) \quad (16-63)$$

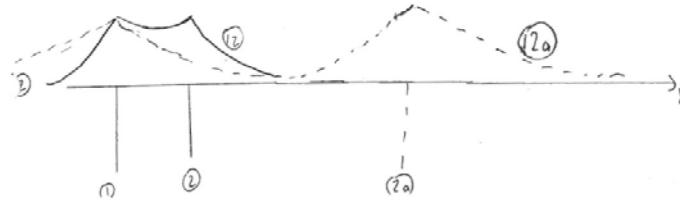
$$\frac{2ma}{\hbar^2 \kappa a} \lambda - 1 = \tanh(\kappa a) \quad (16-64)$$

Çift parite için (16-64) özdeğer denk.nin tamı tamamına daima tek bir çözümü vardır. Şekilden görüleceği gibi $\kappa a < \frac{2ma\lambda}{\hbar^2}$ bağlı durumu için, burada $\frac{2ma\lambda}{\hbar^2} \frac{1}{\kappa a} - 1$ fonksiyonu sıfırdan geçer. Diğer yandan, $\tanh(x) \leq 1$ olduğu için gereksinimimiz $\frac{2ma\lambda}{\hbar^2} \frac{1}{\kappa a} - 1 < 1$ veyahut $\kappa > \frac{m}{\hbar^2} \lambda$ olur. κ 'nın daha büyük olması, $E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}$ bağlanma enerjisinin daha büyük değerde olması anlamına gelir. $\frac{m}{\hbar^2} \lambda < \kappa < \frac{2m}{\hbar^2} \lambda$ olduğundan, tek δ -potansiyelindeki bağlanma enerjisiyle bunu kıyaslarsak, $\kappa_1 = \frac{m}{\hbar^2} \lambda$ olur ki buradan parçacığın çift-kuyu potansiyelinde çok sıkı bağlı olduğu sonucu ortaya çıkar.

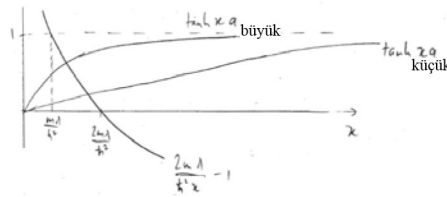


Şekil XI: 16-64 özdeğer denk.nin grafik çözümü

SebeP. Potansiyelden ileri gelen eğimdeki süreksizlik verildiğinde, daha dik bird alga fonksiyonunu seçmek mümkündür (büyük $\kappa \rightarrow$ daha büyük bağlanma enerjisi) ki bu durum iki adet δ -fonksiyonlarının birbirlerine yakın olmaları halinde meydana gelir. Kuyu genişliği a ile bağlanma enerjisinin değişimi: a azalırken bağlanma enerjisi $\kappa = \frac{m\lambda}{\hbar^2}$ ile verilen değerden itibaren $\kappa = \frac{2m\lambda}{\hbar^2}$ 'ye doğru bir artış gösterir ki burada $a \rightarrow 0$ olur. ($a \rightarrow \infty$ 'da tek bir kuyunun bağlanma enerjisine ulaşılır).



Şekil XII: iki farklı kuyu aralığında dalga fonk.larının kıyaslanması. Kuyular birbirlerine yakın iseler, herbir δ fonk. için aynı dalga fonk. süreksizliğinde, iki kuyu dışındaki dalga fonk. hızlı sönüme uğrar (büyük κ) ve sonuçta daha büyük $|E| = \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}$ bağlanma enerjisi ortaya çıkar.



Şekil XIII: Bağlanma yerlerinin arasındaki $2a$ aralığının büyük ve küçük olması durumunda bağlanma enerjilerinin grafik gösterimi.

Böylece bağlanma enerjisi dört kat artış gösterir. Bir çift kuyu sisteminde dalga fonk.nun değişmesinin mümkün olması ve böylece kinetik (ve olasılıkla potansiyel) enerjinin azalması moleküllerdeki kimyasal bağların başlangıç noktasıdır.