

Açısal momentum

Açısal momentum ile ilgili özdenklem şöyle yazılır ki

$$\hat{\mathbf{L}}^2 Y(\theta, \phi) = 2mr^2 E_L(r) Y(\theta, \phi) = \text{const} \cdot Y(\theta, \phi) \quad (20-1)$$

burada $2mr^2 E_L$ özdeğerdir, ve

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \quad (20-2)$$

olur. HO problemine benzer olarak, iki yolla ilerleyebiliriz. Ya

1. Taylor açılımı kullanarak diferansiyel denklemini çözeriz, veyahut
2. Daha soyut olan işlemci yaklaşımını ele alabiliriz.

Biz burada ikinci yolu takip edeceğiz. (Doğrudan bir yaklaşım için bkz. *Gasiorowicz*, ek 7-B veyahut F&T.) Açısal momentum işlemcisi için sıra değiştirme bağıntılarını analiz edelim.

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}} \quad (20-3)$$

Not. Dik yönlerdeki dalgalar birbirinden bağımsız olduklarından, örneğin x ve p_y üzerinde hiçbir Heisenberg belirsizlik kısıtlaması olmadığından dolayı sonuçta sıra değiştirici sıfırdır, $[x, p_y] = 0$.

$\mathbf{L}$ nin farklı bileşenleri arasındaki sıradeğiştirici hesaplayalım: işlemci simgesini ihmal edersek

$$[L_x, L_y] = [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] \quad (20-4)$$

$$= y[p_z, z]p_x + x[z, p_y]p_y \quad (20-5)$$

$$= \frac{\hbar}{i} yp_x + i\hbar xp_y \quad (20-6)$$

$$= i\hbar(xp_y - yp_x) \quad (20-7)$$

$$= i\hbar L_z \quad (20-8)$$

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \quad (20-9)$$

$$[L_y, L_z] = i\hbar L_x \quad (20-10)$$

$$[L_z, L_x] = i\hbar L_y \quad (20-11)$$

Açısal momentumun farklı bileşenlerinin sıra değiştirmemesi gerçeği ilgili durum için $L_z = 0$ olmaz ise örneğin L_x ve L_y 'nin eş zamanlı öz durumlarını bulmak mümkün değildir anlamına gelmektedir (bkz. önceki ders)

$\mathbf{L}^2$ 'ye ne denir?

$$[L_z, \mathbf{L}^2] = [L_z, L_x^2] + [L_z, L_y^2] \quad (20-12)$$

$$= L_x[L_z, L_x] + [L_z, L_x]L_x + L_y[L_z, L_y] + [L_z, L_y]L_y \quad (20-13)$$

$$= i\hbar L_x L_y + i\hbar L_y L_x - i\hbar L_y L_x - i\hbar L_x L_y \quad (20-14)$$

$$= 0 \quad (20-15)$$

Bu $\mathbf{L}^2$ nin ve bir $\mathbf{L}^2$ bileşeninin ve $\mathbf{L}$ 'nin bir bileşeninin eş zamanlı olarak öz durumlarının bulunmasını öngörür, örneğin L_z , ancak tüm bileşenlerin değil.

İspat (Çelişki yoluyla doğrudan ispat) L_x ve L_y 'nin eş zamanlı öz durumu $|n\rangle$ için

$$L_x|n\rangle = l_1|n\rangle, \quad (20-16)$$

$$L_y|n\rangle = l_2|n\rangle. \quad (20-17)$$

olup,

$$[L_x, L_y]|n\rangle = 0 = L_z|n\rangle \quad (20-18)$$

ve

$$l_2|n\rangle = L_y|n\rangle = \frac{1}{i\hbar}[L_z, L_x]|n\rangle = 0 \rightarrow l_2 = 0 \quad (20-19)$$

yazılır, benzer şekilde $l_1 = 0$. Sadece $\mathbf{L} = 0$ için L_x, L_y ve L_z 'nin eş zamanlı öz durumlarına sahip oluruz.

Genel olarak, sadece $\mathbf{L}^2$ ve L_z (anlaşma ile L_x, L_y ve L_z 'nin) eş zamanlı olarak öz durumlara sahip olabilir. Böyle bir öz durumu $|l, m\rangle$ ile verirsek

$$L_z|l, m\rangle = m\hbar|l, m\rangle \quad (20-20)$$

$$\mathbf{L}^2|l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l, m\rangle \quad (20-21)$$

yazılabilir.

l kuantum sayısının tuhaf tanımı (veya $\mathbf{L}^2$ özdeğeri $\hbar^2 l(l+1)$) nin sebebi daha sonra ortaya çıkacaktır. m ve l boyutsuz sayılardır zira $\mathbf{L} = \mathbf{r} + \mathbf{p}$ 'nin birimi $\hbar$ dır. $\mathbf{L}^2$ ve L_z 'nin eş zamanlı öz durumlarının normalleştğini kabul ediyoruz,

$$\boxed{\langle l', m' | l, m \rangle = \delta_{l'l} \delta_{m'm}} \rightarrow \begin{array}{l} \text{açısal momentum} \\ \text{öz durumlarının} \\ \text{ortonormalliği} \end{array} \quad (20-22)$$

Açısal momentum için yükseltme ve alçaltma işlemcileri

Aşağıdaki Hermitsel olmayan işlemcileri tanımlamak kullanışlı olur.

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y \quad (20-23)$$

$$L_+^{\dagger} = L_- \quad (20-24)$$

$$L_-^{\dagger} = L_+ \quad (20-25)$$

L_+ ve L_- birbirinin Hermitsel eşleniğidir ($\hat{a} = \frac{\hat{x}}{x_0} + i\frac{\hat{p}}{p_0}$, $\hat{a}^{\dagger} = \frac{\hat{x}}{x_0} - i\frac{\hat{p}}{p_0}$ lere benzerlik). Bu işlemcilerin benzer önemini anlamak için, bunların sıra değişim bağıntılarını analiz edelim:

$$[\mathbf{L}^2, L_{\pm}] = 0 \quad (20-26)$$

zira $[\mathbf{L}^2, L_x] = 0$, $[\mathbf{L}^2, L_y] = 0$.

$$[L_+, L_-] = [L_x + iL_y, L_x - iL_y] \quad (20-27)$$

$$= -i[L_x, L_y] + i[L_y, L_x] \quad (20-28)$$

$$= -2i[L_x, L_y] \quad (20-29)$$

$$= -2i\hbar L_z \quad (20-30)$$

$$= 2\hbar L_z \quad (20-31)$$

$$[L_+, L_-] = 2\hbar L_z \quad (20-32)$$

$$[L_{\pm}, L_z] = [L_x \pm iL_y, L_z] \quad (20-33)$$

$$= [L_x, L_z] \pm i[L_y, L_z] \quad (20-34)$$

$$= -i\hbar L_y \pm i(i\hbar L_x) \quad (20-35)$$

$$= \mp\hbar L_x - i\hbar L_y \quad (20-36)$$

$$= \mp\hbar(L_x \pm L_y) \quad (20-37)$$

$$= \mp\hbar L_{\pm} \quad (20-38)$$

$$[L_{\pm}, L_z] = \mp\hbar L_{\pm} \quad (20-39)$$

Aynı zamanda dikkat edersek

$$L_+ L_- = (L_x + iL_y)(L_x - iL_y) \quad (20-40)$$

$$= L_x^2 + L_y^2 - iL_x L_y + L_y L_x \quad (20-41)$$

$$= L^2 - L_z^2 - i[L_x, L_y] \quad (20-42)$$

$$= \mathbf{L}^2 - L_z^2 + \hbar L_z \quad (20-43)$$

ve benzer şekilde $L_- L_+ = \mathbf{L}^2 - L_z^2 - \hbar L_z$.

$$\boxed{\begin{aligned} L_+ L_- &= \mathbf{L}^2 - \mathbf{L}_z^2 + \hbar L_z \\ L_- L_+ &= \mathbf{L}^2 - \mathbf{L}_z^2 - \hbar L_z \end{aligned}}$$

HO'deki gibi şimdi l, m için izinli değerlerin aralığını analize başlayalım:

$\mathbf{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ ve L_x, L_y, L_z Hermitsel işlemciler olduklarından dolayı

$$\langle l, m | L_x^2 | l, m \rangle = \langle L_x^\dagger(l, m) | L_x(l, m) \rangle = \langle L_x(l, m) | L_x(l, m) \rangle \geq 0, \quad (20-44)$$

benzer şekilde x, y için ve sonuçta $\langle l, m | \mathbf{L}^2 | l, m \rangle \geq 0$ veyahut

$$0 \leq \langle l, m | \mathbf{L}^2 | l, m \rangle = \hbar^2 l(l+1) \langle l, m | l, m \rangle = \hbar^2 l(l+1). \quad (20-45)$$

Sonuç olarak, $l \geq 0$ seçebiliriz. ($l \leq -1$ ise, $l' := -(l+1)$ tanımlarsak, bu takdirde $l(l+1) = -l'(l'+1)$ ve $l' \geq 0$.) $L_\pm$ işlemcilerini anlamak için, yeni bir durumu tanımlayalım

$$|\psi_\pm\rangle := L_\pm |l, m\rangle, \quad (20-46)$$

ve $\mathbf{L}^2$ 'yi $\psi_\pm$ 'ye etki ettirelim.

$$\mathbf{L}^2 |\psi_\pm\rangle = \mathbf{L}^2 L_\pm |l, m\rangle \quad (20-47)$$

$$= L_\pm \mathbf{L}^2 |l, m\rangle \quad (20-48)$$

$$= \hbar^2 l(l+1) L_\pm |l, m\rangle \quad (20-49)$$

$$= \hbar^2 l(l+1) |\psi_\pm\rangle, \quad (20-50)$$

böylece $|\psi_\pm\rangle$, aynı kuantum sayısı l ile $\mathbf{L}^2$ 'nin bir özdurumu olur. Aynı zamanda şunlara sahip oluruz.

$$L_z |\psi_\pm\rangle = L_z L_\pm |l, m\rangle \quad (20-51)$$

$$= (L_\pm L_z \pm \hbar L_\pm) |l, m\rangle \quad (20-52)$$

$$= (m\hbar \pm \hbar) L_\pm |l, m\rangle \quad (20-53)$$

$$= (m \pm 1) \hbar L_\pm |l, m\rangle \quad (20-54)$$

$$= (m \pm 1) \hbar |\psi_\pm\rangle. \quad (20-55)$$

Bunun anlamı $L_\pm |l, m\rangle$ nin aynı zamanda L_z 'nin bir özdurumu olması, ancak özdeğeri $(m \pm 1)\hbar$ ilkinden bir sayısı ile farklılık göstermesidir. m açısal momentumunun z bileşeniyle ilgili olduğundan, m 'ye **azimutsal (veya manyetik) kuantum sayısı**, öte yandan l ise **toplam açısal momentumla ilgili kuantum sayısıdır**. L_+ (L_-) manyetik kuantum sayısını bir sayısı ile yükseltir (alçaltır)ken toplam açısal momentum l korunur. Şimdi

$$|l, \widetilde{m \pm 1}\rangle := L_\pm |l, m\rangle, \quad (20-56)$$

normalleştirilmemiş durum vektörünün uzunluğunu hesaplayalım.

$$\langle l, \widetilde{m \pm 1} | l, \widetilde{m \pm 1} \rangle = \langle l, m | L_{\mp} L_{\pm} l, m \rangle \quad (20-57)$$

$$= \langle l, m | \mathbf{L}^2 - L_z^2 \mp \hbar L_z | l, m \rangle \quad (20-58)$$

$$= \hbar^2 l(l+1) - \hbar^2 m^2 \mp \hbar^2 m^2 \langle l, m | l, m \rangle \quad (20-59)$$

$$= \hbar^2 (l(l+1) - m(m \pm 1)) \quad (20-60)$$

$$= \hbar^2 (l \mp m)(l \pm m + 1) \quad (20-61)$$

Herhangi bir vektörün uzunluğunun karesi negatif olamayacağından

$$l(l+1) - m(m \pm 1) \geq 0 \quad (20-62)$$

ortaya çıkar. Sonuç olarak,

$$m(m \pm 1) = m^2 \pm m + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \quad (20-63)$$

$$= \left(m \pm \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad (20-64)$$

$$\leq l^2 + l = \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad (20-65)$$

veya

$$\left|m \pm \frac{1}{2}\right| \leq \left|l + \frac{1}{2}\right| = l + \frac{1}{2} \quad (20-66)$$

$l \geq 0$, olduğundan

$$m \leq l, \quad m > 0 \quad (20-67)$$

ve aynı zamanda

$$-m \leq l, \quad m \leq 0 \quad (20-68)$$

Böylelikle, m yukarıdan ve aşağıdan sınırlı olur:

$$\boxed{-l \leq m \leq l}, \quad l \geq 0. \quad (20-69)$$

$|\psi_+\rangle = L_+ |l, m\rangle$, $\mathbf{L}^2$ ve L_z nin bir öz durumu olduğundan, ancak $m' = m + 1$ yeni bir özdeğerli, m üzerindeki bağıllık sadece bazı m değeri için $L_+ |l, m\rangle = 0$ gerçeği ile uyumluluk söz konusudur. Sonuç olarak

$$L_+ |l, m\rangle = |l, \widetilde{m+1}\rangle \quad (20-70)$$

$$0 = \langle l, \widetilde{m+1} | l, \widetilde{m+1} \rangle \quad (20-71)$$

$$= \hbar^2 (l - m)(l + m + 1). \quad (20-72)$$

olmak üzere

$$\boxed{m_{\max} = l} \quad (20-73)$$

Benzer şekilde

$\text{ket}\psi_- = L_-|l, m\rangle$ için

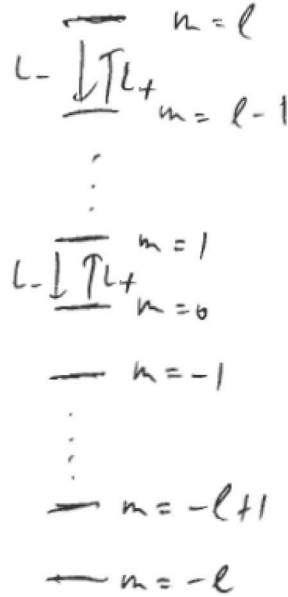
$$\boxed{m_{\min} = -l} \quad (20-74)$$

ye sahip oluruz.

Böylece, L_+ yükseltici ve L_- alçaltıcı işlemleriyle bağlı ve birer aralıklı bir özdeğerler merdiveni oluşur.

$$\boxed{m = -l, -l+1, \dots, l-1, l}, \quad l \geq 0 \quad (20-75)$$

bu ancak sadece l nin tamsayı veya yarı tamsayı olması ile mümkündür. l 'nin yarı tamsayı katlı değerlerinin basit bir konumsal temsile sahip olmadığı ortaya çıkar ve bu parçacığın **spin** olarak bilinen bir iç açısal momentuma karşı gelir.



Şekil I: Sabit l için özdeğer merdiveni

Biz burada kendimizi **yörünge açısal momentumuna** kısıtlayacağız ki bu l 'nin bir tamsayı olmasını gerektirir.