

Geçen Derste

- Kırınım olayı olarak Heisenberg belirsizlik ilkesi $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$
- Fourier ayrışımı

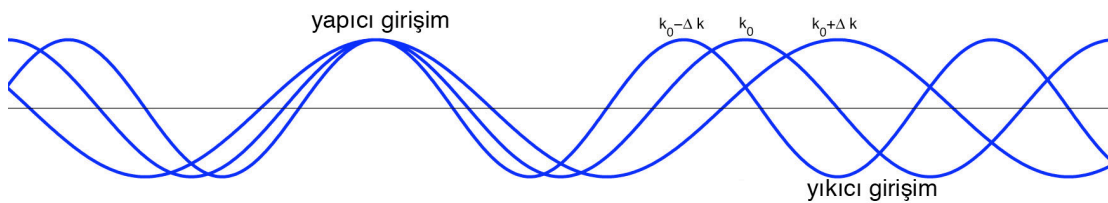
$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{\phi}(k) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \phi(p) e^{ipx/\hbar}\end{aligned}\quad (4-1)$$

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \tilde{\phi}(k) \quad (4-2)$$

Bugün

- $\phi(k)$ 'yı nasıl hesaplarız
- $\psi(x)$ ve $\phi(k)$ 'in yorumu:
olasılık genliği ve olasılık yoğunluğu
- ölçüm

$\tilde{\phi}(k)$ veya $\phi(p)$ daha büyük olursa, $\psi(x)$ dalga fonksiyonu düzlem dalgaya e^{ikx} , daha çok benzer ve belli $p = \hbar k$ momentumuna sahip olur. Parçacığın momentumu ölçülürse, $\psi(x)$ ile betimlenen dalga fonksiyonunun $\hbar k$ momentumuna sahip olma olasılığı da artar. Bunun tersine, parçacığın momentumu tamı tamamına $p = p_0 = \hbar k_0$ ise, parçacığın dalga fonksiyonu, $\psi(x) = e^{ik_0 x}$ olmalıdır ve parçacık $\Delta x \rightarrow \infty$ giderken uzayda herhangi bir yerde bulunabilmelidir. Uzayda bir parçacığı yerelleştirmek için k_0 'a yakın başka Fourier bileşenleri eklemek durumundayız.



Şekil I: k_0 'a yakın Fourier bileşenlerinin eklenmesi uzayda yerleşik bir dalga meydana getirir.

Bir dalga fonksiyonunu uzayın Δx gibi küçük bir bölgesine sıkıştırmak için birçok Fourier bileşenlerine, yani farklı momentuma sahip olan $k \in [k_0, k_0 + \Delta k]$ birçok düzlem dalgaya ihtiyaç duyulur. Uygun şekilde tanımlanmış Δx ve Δk belirsizlikleriyle matematiksel olarak ispat edeceğiz ki:

$$\boxed{\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}} \Rightarrow \text{Fourier ayrışımından ortaya çıkar. } \Delta p = \hbar \Delta k \text{ 'yi} \quad (4-3)$$

kullanarak şuna ulaşırız.

$$\boxed{\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}} \Rightarrow \text{Heisenberg belirsizlik ilkesi} \quad (4-4)$$

Bu görüş açısından, Heisenberg belirsizlik ilkesi bir dalganın e^{ikx} düzlem dalgalarına ayrışmasından ortaya çıkar. Yani, belli dalga vektörüne sahip dalgalar ve $p = \hbar k$ ile verilen k dalga vektörü ve momentum arasındaki bağıntının sonucudur. Δx bölgesi ne kadar küçükse daha çok, $p = \hbar k$ 'lı Fourier bileşenleri Δx dışında yıkıcı girişim oluşturulması için gereklidir.

Sonuç: parçacıkların hareketi Şekil I'deki düzlem dalgalar ve parçacıkların hareketinden eğer farklı Fourier bileşenlerinin bağıl fazını değiştirirseniz, uzayda başka bir yerde yapıcı girişim oluşacaktır. Bu anlamlıdır. Momentum dağılımını korurken, uzayda parçacığı farklı bir yerde konumlandırabiliriz. Şayet düzlem dalgalar arasındaki bağıl faz sürekli şekilde değişiklik gösterirse, yapıcı girişimin yeri (yani parçacığın yeri) uzayda hareket edecektir. Dalga mekaniğine göre, parçacığın hareketi, Fourier bileşenlerinin faz değişiminden ileri gelir (yani düzlem dalgalar). Bu takdirde klasik mekaniğe (CM) dönüşmek için, Fourier bileşenlerinin fazı, zamana göre p momentumuna bağlı bir frekansla dönmek zorundadır.

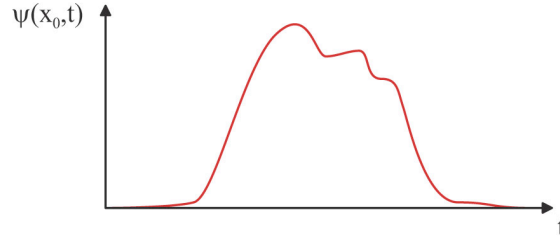
Sonuç: zaman-enerji belirsizliği Sabit bir zamanda konum koordinatının Fourier dönüşümü $\Psi(x, t_0) \rightarrow \tilde{\Phi}(k, t_0)$ yerine, konumu $x = x_0$ 'da sabitleyip, bunun yerine $\Psi(x, t_0)$ dalga fonksiyonunun zamanla değişimini ele alırsak, dalga fonksiyonunun frekans bileşenleri cinsinden Fourier ayrışımını yapmış oluruz.

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega) e^{-i\omega t} \quad (4-5)$$

Anlaşma. Pozitif frekans ω , negatif faz evrimine yol açar. Aynı matematiksel ve mantıksal tartışmalar sonucunda:

$$\boxed{\Delta \omega \Delta t \geq \frac{1}{2}} \Rightarrow \text{zaman-frekans belirsizliği} \quad (4-6)$$

$$\boxed{\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}} \Rightarrow \text{enerji-zaman Heisenberg belirsizliği } E = \hbar \omega \quad (4-7)$$



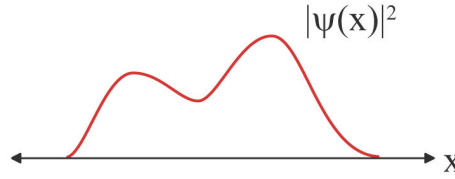
Şekil II: Zamana karşı dalga fonksiyonu

Olasılık genliği ve olasılık yoğunluğu

Işık veya diğer dalgalar için birim hacim başına enerji (veyahut birim uzunluk başına) elektrik alanının karesiyle orantılıdır. Birim hacim başına fotonların sayısı $|\mathbf{E}|^2$ ile orantılı olduğundan, benzer olarak şunu öne sürebiliriz:

$$(x \text{ ve } x + dx \text{ arasında bir parçacığın bulunma olasılığı}) = |\psi(x)|^2 \quad (4-8)$$

$|\psi(x)|^2$ olasılık yoğunluğu (birim uzunluk başına olasılık) olarak bilinir.



Şekil III: $|\psi(x)|^2$ dalga fonksiyonunun karesi, parçacığın uzayın bir bölgesinde bulunma olasılık yoğunluğudur. Parçacığı $[x, x+dx]$ uzaysal aralığında bulma olasılığı $|\psi(x)|^2 dx$ ile verilmiştir.

Dalga şekli $\psi(x)$ 'e aynı zamanda olasılık genliği (daha doğrusu: olasılık yoğunluk genliği) adı verilir. **EM** alanlarının aksine, ψ gerçekten kompleks bir niceliktir. Parçacığın uzayda bir yerde bulunması gereksinimi **normalizasyon şartına** yol açar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 = 1. \quad (4-9)$$

Ev ödevinde, **Parseval teoremini** ispatlayacaksınız.

İspat. $\tilde{\phi}(k)$ ve $\phi(p)$ bir dalga fonksiyonunun $\psi(x)$ Fourier dönüşümü iseler, yani eğer

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{\phi}(k) e^{ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \phi(p) e^{ipx/\hbar}$$

ise

bu takdirde,

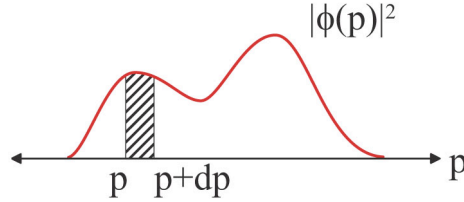
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk |\tilde{\phi}(k)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dp |\phi(p)|^2.$$

Eğer $|\psi(x)|^2$ dalga fonksiyonu normalleştirilirse, $|\phi(p)|^2$ de edilmiş olur. Eğer $\phi(p)$, bir p_0 değeri civarında en büyük olursa, parçacığın hareketi, p_0 momentumuna sahip klasik bir parçacığınkine benzer ($e^{ip_0x/\hbar}$ düzlem dalgası). **Parseval teoremi**'ni hesaba katarak, $\phi(p)$ 'yi momentum için olasılık genliği olarak yorumlamak akla yatkındır, yani

$$(p \text{ ve } p + dp \text{ momentum aralığında} = |\phi(p)|^2 dp. \quad (4-10)$$

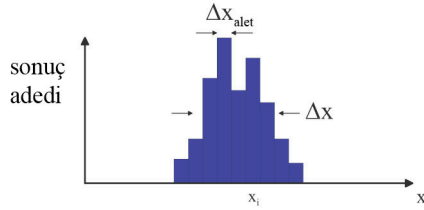
bir parçacığın bulunma olasılığı)

Benzer şekilde, $|\tilde{\phi}(k)|^2$ ise dalga vektörü k için olasılık yoğunluğudur.

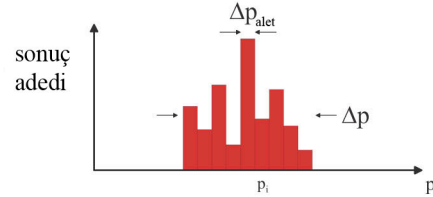


Şekil IV: Momentum uzayındaki olasılık yoğunluğu $|\phi(p)|^2$ dir.

Δx (veya Δp) ölçüm aletinin belirsizliği olmayıp, parçacık ile ilişkilendirilmiştir. Eğer ölçüm aletimizin ayrışımı $\Delta x_{alet} \ll \Delta x$ ise ve deneyi özdeş olarak hazırlanmış bir parçacıkla birçok defa tekrar edersek, bir çubuk grafik gözlemleyebiliriz. Çok yüksek sayıda ölçüm yapılması halinde, çubuk grafik $|\psi(x)|^2$ veya $|\phi(p)|^2$ olasılık yoğunluğu meydana getirir.



Şekil V: Konum uzayında olasılık yoğunluğu kurulması



Şekil VI: Momentum uzayında olasılık yoğunluğu kurulması

Not. Δx_{alet} belirsizliği altında belli bir x değerinin ölçümünden sonra parçacık artık ilk dalga fonksiyonu $\psi(x)$ ile betimlenmeyip, yeni bir dalga fonksiyonu $\tilde{\psi}(x)$ ile temsil edilir ki bu ölçümün sonucuyla uyuma halinde olan yeni bir dalga fonksiyonudur (“çöküntü dalga fonksiyonu”).

Özellikle, eğer $\Delta x_{alet} \ll \Delta x$ ise, yeni dalga fonksiyonu $\tilde{\psi}(x)$ 'in momentum dağılımı eskisine göre daha büyük olur ve bu Heisenberg belirsizliği $(\Delta \tilde{x}) \equiv \Delta x_{\tilde{p}} = \Delta x_{alet}$ ile uyuşma halindedir.

$$\Delta \tilde{x} \Delta \tilde{p} = \Delta x_{alet} \Delta \tilde{p} \gtrsim \frac{\hbar}{2}, \quad (4-11)$$

veyahut

$$\Delta \tilde{p} \gtrsim \frac{\hbar}{2\Delta x_{alet}} \gg \frac{\hbar}{2\Delta x} = \Delta p. \quad (4-12)$$

Şimdi momentumu $\Delta p_{alet} \ll \Delta \tilde{p}$ çözünürlüğü ile ölçebilirsek, konumdaki belirsizlik yine artış gösterecektir.

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{\phi}(k) e^{ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \phi(p) e^{ipx/\hbar} \quad (4-13)$$

Konum dalga fonksiyonu $\psi(x)$ verilirken momentum dağılımı $|\phi(p)|^2$ nasıl belirlenebilir?

Açınım katsayılar $\phi(k)$ 'ler Fourier ayrışımının tersiyle verilmiştir:

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) e^{-ikx}$$

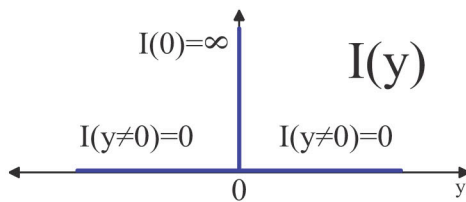
İspat.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \phi(k) e^{ikx} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi(x') e^{-ikx'} e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi(x') \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} \end{aligned}$$

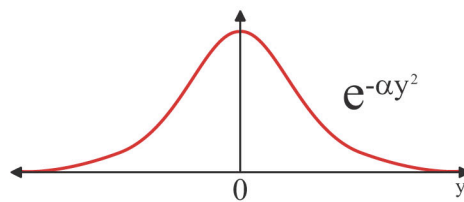
$\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')}$ integralinin değeri nedir? Niteliksel olarak eğer $x \neq x'$ ise, $k \rightarrow \pm\infty$ giderken

integrand kompleks düzlemde salınır ve integral sıfır olur. Eğer $x = x'$ ise, integral $\int_{-\infty}^{\infty} dk \cdot 1$

olup, ıraksar. Böylece, $I(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{iky}$ “foksiyonu” şöyle görünür:



Şekil VII: $I(y)$ integrali ile temsil edilen “foksiyonu” grafiği



Şekil VIII: $I(y)$ nin evrişimi ve “ $I(y)$ altındaki alan”ı belirleyen bir Gauss fonksiyonu

İraksama nasıl kötü olmaktadır? Eğri altındaki alanı hesaplayalım $\rightarrow \alpha$ gerçel ve pozitif olsun.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dy I(y) e^{-\alpha y^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{iky} e^{-\alpha y^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\alpha y^2 + iky}\end{aligned}\quad (4-14)$$

İntegrali hesaplamak için ispatsız olarak:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\alpha(y-\beta)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}, \quad \text{Re}(\alpha) \geq 0 \text{ olmak üzere herhangi bir } \alpha, \beta \text{ karmaşık sayısı} \quad (4-15)$$

Yukarıdaki Denk. (4-14) integralini istenen şekle sokmak için üsteli açınma tabi tutalım:

$$\begin{aligned}-\alpha y^2 + iky &= -\alpha \left(y^2 - \frac{ik}{\alpha} y + \left(\frac{ik}{2\alpha} \right)^2 \right) - \frac{k^2}{4\alpha} \\ &= -\alpha \left(y - \frac{ik}{2\alpha} \right)^2 - \frac{k^2}{4\alpha}\end{aligned}\quad (4-16)$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dy I(y) e^{-\alpha y^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\alpha \left(y - \frac{ik}{2\alpha} \right)^2 - \frac{k^2}{4\alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\frac{k^2}{4\alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sqrt{\pi \cdot 4\alpha} \\ &= 2\pi\end{aligned}\quad (4-17)$$

$\Rightarrow \alpha$ değerinden bağımsızdır! $e^{-\alpha y^2}$ araştırma fonksiyonumuz $\rightarrow 1$ gittiğinden fonksiyonumuz $I(y)$ altındaki alan sonlu olup, 2π 'ye eşittir. Şimdi bir “genelleştirilmiş fonksiyon” (matematiksel olarak, bir dağılımı) tanımlayalım:

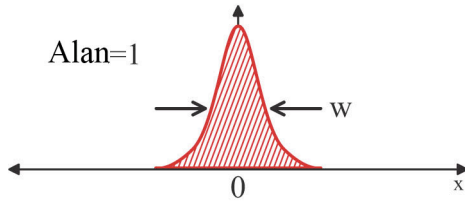
$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \neq 0, \\ \infty & \text{for } x = 0. \end{cases}\quad (4-18)$$

öyleki bunun özelliği

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1. \quad (4-19)$$

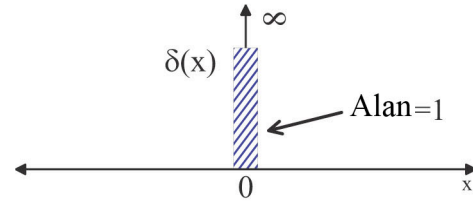
olan **Dirac delta fonksiyonudur**. Altındaki alanı sbt tutarak gittikçe daraltılan sonlu bir genişliğin limit durumu gibi düşünebiliriz (yani bir Gauss veya kare fonksiyon). Bu

durumda $\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{iky} = 2\pi \delta(y)$ olur.



Şekil IX: Delta fonksiyonu

$\delta(x) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}} e^{-\frac{x^2}{2\omega^2}}$ olarak ifade edilebilir.



Şekil X: Dirac delta fonksiyonu

Delta fonksiyonunu özellikleri

$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x - x_0)$ nedir? $x = 0$ 'da yeterince düzgün (düzenli) olan ve $x \neq x_0$ için $\delta(x - x_0)$ kullanarak,

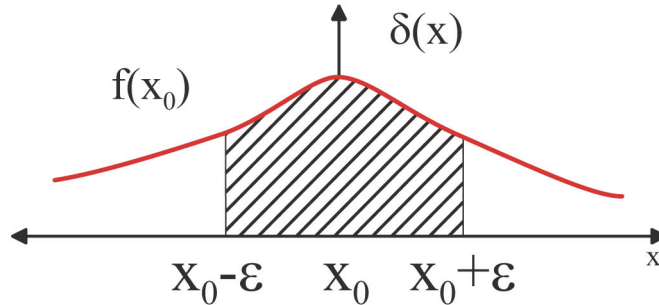
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x - x_0) &= \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} dx f(x) \delta(x - x_0) \\ &= f(x_0) \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} dx \delta(x - x_0) \\ &= f(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = f(x_0). \end{aligned} \quad (4-20)$$

buluruz. Böylelikle,

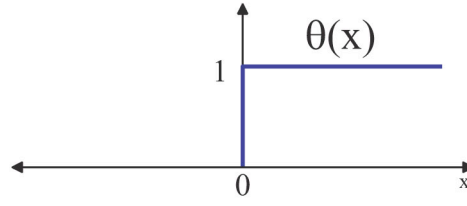
$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0)}. \quad (4-21)$$

yazabiliriz.

Bir $f(x)$ fonksiyonunun $\delta(x - x_0)$ ile evrişimi, fonksiyonun değerini x_0 'da “tahmine” yol açar.



Şekil XI: Yeterince düzgün bir fonksiyonu bir Dirac delta fonksiyonu ile evrişime tabi tutmak bu noktada fonksiyonun değerini bulmaya yol açar.



Şekil XII: δ -fonksiyonu, Heavyside basamak fonksiyonunun türevidir.

İspat yapmadan, $\delta(x) = \frac{d}{dx}\Theta(x)$ olduğunu görebiliriz. Delta fonksiyonunun türevi belirlenebilir. Kısmi integrasyon yoluyla,

$$\int dx f(x) \delta'(x - x_0) = -f'(x - x_0). \quad (4-22)$$

elde edebiliriz.

δ' ile evrişim x_0 'da negatif türevi öngörür.