

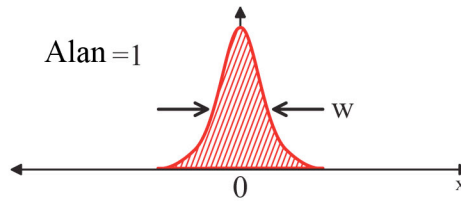
Geçen Derste

- $|\psi(x)|^2$ ve $|\phi(k)|^2$ sırasıyla konum ve momentum uzayındaki olasılık yoğunlukları
- **Parseval teoremi:** $\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk |\phi(k)|^2$
- **Normalizasyon:** $1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk |\phi(k)|^2$
- **Ölçüm:** $\Delta x_{alet} < \Delta x$ çözünürlüğü ile x 'in ölçümü Δx sınırında keyfi sonuç ortaya çıkarır (olasılığı $|\psi(x)|^2 \Delta x_{alet}$) ve momentum dağılımını **değiştirir: ölçümün ters etkisi**
- Heisenberg belirsizliğini ihlal etmede $|\psi(x)|^2$ ve $|\tilde{\phi}(p)|^2$ olasılık dağılımlarını tam olarak ve eşzamanlı şekilde bilebiliriz. Deneyin özel olarak yapılmasında bir momentum ölçümünü takip eden bir konum ölçümünün sonuçlarını $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ den daha hassas olarak öngöremeyiz.
- $\psi(x)$, $\phi(k)$ 'yi tekil olarak belirlediğinden dolayı, $\psi(x)$ dalga fonksiyonu konum uzayında parçacığın hem konumsal hemde momentum dağılımını belirtir. $|\psi_1(x)|^2 = |\psi_2(x)|^2$ aynı yoğunluk olasılıklı farklı $\psi_1(x)$ ve $\psi_2(x)$ dalga fonksiyonları parçacıkların aynı konum dağılımını fakat farklı momentum dağılımlarını betimlerler.

$$\boxed{\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) e^{-ikx}} \implies \text{Fourier Dönüşümü} \quad (5-1)$$

$$\boxed{\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \phi(k) e^{ikx}} \implies \text{Ters Fourier Dönüşümü} \quad (5-2)$$

- **Dirac delta fonksiyonu:**



Şekil I: Dirac delta fonksiyonu.

$$\delta(x) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi w}} e^{-\frac{x^2}{2w^2}} \quad (5-3)$$

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \neq x_0, \\ \infty & \text{for } x = x_0. \end{cases} \quad (5-4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) = 1 \quad (5-5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0) \quad (5-6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\pm i k x} = 2\pi \delta(k) \quad (5-7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{\pm i k x} = 2\pi \delta(x) \quad (5-8)$$

Bugün

- İspatın bitirilmesi : **ters Fourier dönüşümü**
- Belirsizliklerin ve beklenti değerlerinin tam tanımı
- İspat (bkz. notlar): $\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}$, $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, $\Delta \omega \Delta t \geq \frac{1}{2}$, $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$,
- **Compton saçınımı**
- **Fotoelektrik etki**

Tekrar $I(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{iky}$ integraline dönelim. $I(y)$ 'nin altındaki alanın 2π ye eşit olduğunu belirlemiştik. Sonuç olarak, diğer kullanışlı bir özdeşlik:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{iky} = 2\pi \delta(y) \quad (5-9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} = 2\pi \delta(k) \quad (5-10)$$

Şimdi ters Fourier dönüşüm ispatımızı tamamlayabiliriz.

Ters Fourier Dönüşümü.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\phi}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) e^{-ikx} \\
 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{\phi}(k) e^{ikx} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi(x') \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi(x') 2\pi \delta(x-x') \\
 &= \psi(x)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) e^{-ikx}} \implies \text{Fourier dönüşümü} \quad (5-11)$$

$$\boxed{\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \phi(k) e^{ikx}} \implies \text{ters Fourier dönüşümü} \quad (5-12)$$

(Fourier ayrışımı)

$\phi(k)$ ve böylece momentum dağılımı $|\tilde{\phi}(p)|^2$ tamamen $\psi(x)$ ile tayin edildiğinden, dalga fonksiyonu parçacığa ait konumsal ve momentum bilgilerini birlikte taşır.

Beklenti değerleri ve belirsizliğin hassas bir tanımı

Bir parçacığın $[x, x+dx]$ aralığında bulma olasılığı $|\psi(x)|^2$ ile verildiğinden, bu parçacığın konumunun beklenti değerini şöylece hesaplayabiliriz.

$$\boxed{\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x |\psi(x)|^2} \implies \text{ortalama konum} \quad (5-13)$$

Benzer şekilde,

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^n |\psi(x)|^2 \quad (5-14)$$

tanımlayabiliriz ve konum fonksiyonu herhangi bir $f(x)$ için,

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) |\psi(x)|^2. \quad (5-15)$$

Bir parçacığın konumundaki Δx belirsizliğini şu bağıntı ile tanımlayabiliriz:

$$\boxed{(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \geq 0} \implies \Delta x \text{'in hassas tanımı} \quad (5-16)$$

Eşitliğin sağ tarafını açarsak:

$$\begin{aligned}\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle &= \langle x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \rangle \\ &= \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle \langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \\ (\Delta x)^2 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2\end{aligned}\quad (5-17)$$

Benzer şekilde, $|\tilde{\phi}(p)|^2$ momentumun olasılık yoğunluğu olduğundan,

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp p |\tilde{\phi}(p)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk (\hbar k) |\phi(k)|^2 \quad (5-18)$$

$$\langle f(p) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp f(p) |\tilde{\phi}(p)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk f(\hbar k) |\phi(k)|^2 \quad (5-19)$$

$$(\Delta p)^2 = \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 \quad (5-20)$$

Bu tanımları kullanarak şu teoremi ispatlayabiliriz:

Teorem 5.1. Herhangi bir $\psi(x)$ için

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}. \quad (5-21)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. $\hbar$ ile çarpılırsa, Heisenberg belirsizlik ilkesini elde ederiz.

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (5-22)$$

Eşitlik sadece Gauss fonksiyonları için geçerlidir.

İspat. Şimdi pozitif nicelik

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| x\psi(x) + \lambda \frac{d\psi}{dx} \right|^2 \geq 0, \quad (5-23)$$

ele alalım, burada λ gerçel bir sayıdır. Genelliği kaybetmeksizin koordinat sisteminin başlangıç noktasını, parçacığın konumunun beklenti değeri olan $\langle x \rangle = 0$ olarak seçebiliriz.

$I(\lambda)$ daki integrandı integral dışına alırsak, üç terim vardır. Bunlardan ilki

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 |\psi(x)|^2 = \langle x^2 \rangle = (\Delta x)^2 \quad (5-24)$$

olur zira $\langle x \rangle = 0$. İkinci terim, kısmi integrasyon yoluyla

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} dx \lambda x \left(\psi \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^* + \psi^* \frac{d\psi}{dx} \right) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \lambda x \frac{d}{dx} (\psi^* \psi) \\
 &= \underbrace{\lambda x \psi^*(x) \psi(x) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty}}_{=0 \text{ eğer } x \rightarrow \pm\infty \text{ iken } \psi(x)=0 \text{ ise}} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx \lambda |\psi(x)|^2}_{=\lambda \text{ olur zira } \psi(x) \text{ normalize edilmiştir.}} \\
 &= \lambda
 \end{aligned} \tag{5-25}$$

bulunur.

Sonuncu terim Fourier dönüşümü cinsinden temsil edilebilir.

$$\begin{aligned}
 \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| \frac{d\psi}{dx} \right|^2 &= \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{\phi}(k) e^{ikx} \right) \\
 &\quad \cdot \left(\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \tilde{\phi}(k') e^{ik'x} \right)^* \\
 &= \frac{\lambda^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\int_{-\infty}^{\infty} dk i k \tilde{\phi}(k) e^{ikx} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dk' i k' \tilde{\phi}(k') e^{ik'x} \right)^* \\
 &= \frac{\lambda^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk' k k' \tilde{\phi}(k) \tilde{\phi}^*(k') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k-k')x}}_{2\pi \delta(k-k')} \\
 &= \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk' k k' \tilde{\phi}(k) \tilde{\phi}^*(k') \delta(k - k') \\
 &= \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} dk k^2 |\phi(k)|^2 \\
 &= \lambda^2 \langle k^2 \rangle \\
 &= \lambda^2 (\Delta k)^2.
 \end{aligned} \tag{5-26}$$

Burada yine sonuncu adımda, $\langle p \rangle = 0$ olan bir koordinat sistemini genelleşmeyi bozmadan Kabul etmiş bulunuyoruz. Böylece

$$\begin{aligned}
 I(\lambda) &= (\Delta x)^2 - \lambda + \lambda^2 (\Delta k)^2, \text{ and } I(\lambda) \geq 0 \text{ for all } \lambda \\
 &= (\Delta k)^2 \left(\lambda^2 - \frac{\lambda}{(\Delta k)^2} + \frac{1}{4(\Delta k)^2} \right) - \frac{1}{4(\Delta k)^2} + (\Delta x)^2 \\
 &= (\Delta k)^2 \left(\lambda - \frac{1}{2(\Delta k)^2} \right)^2 + (\Delta x)^2 - \frac{1}{4(\Delta k)^2}.
 \end{aligned} \tag{5-27}$$

bulunur.

$I(\lambda) \geq 0$ olması böylelikle, $(\Delta x)^2 \geq \frac{1}{4(\Delta k)^2}$ veya $\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}$ olmasını gerektirir.

Bir ev ödevi probleminde eşitliğin sadece Gauss dalga paketleri için geçerli olduğunu göstereceksiniz. İspatlamaksızın eşitliğin **sadece** Gauss dalga paketleri için geçerli olduğunu biliyoruz. Aynı hesaplama zaman-frekans bölgesinde

$$\Delta\omega\Delta t \geq \frac{1}{2} \quad (5-28)$$

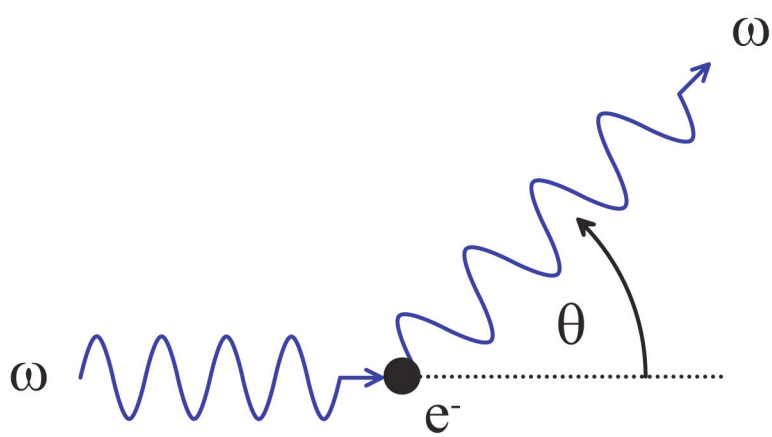
veyahut $\hbar$ ile çarpılırsa, $E = \hbar\omega$,

$$\Delta E\Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (5-29)$$

olur. $\Rightarrow$ Enerji-zaman belirsizliği. Heisenberg belirsizliği ortaya çıkmaktadır zira sonlu bir zaman aralığında (konum aralığı) bir frekansı (dalga boyu) ölçmekteki kabiliyetsizliğimiz söz konusudur.

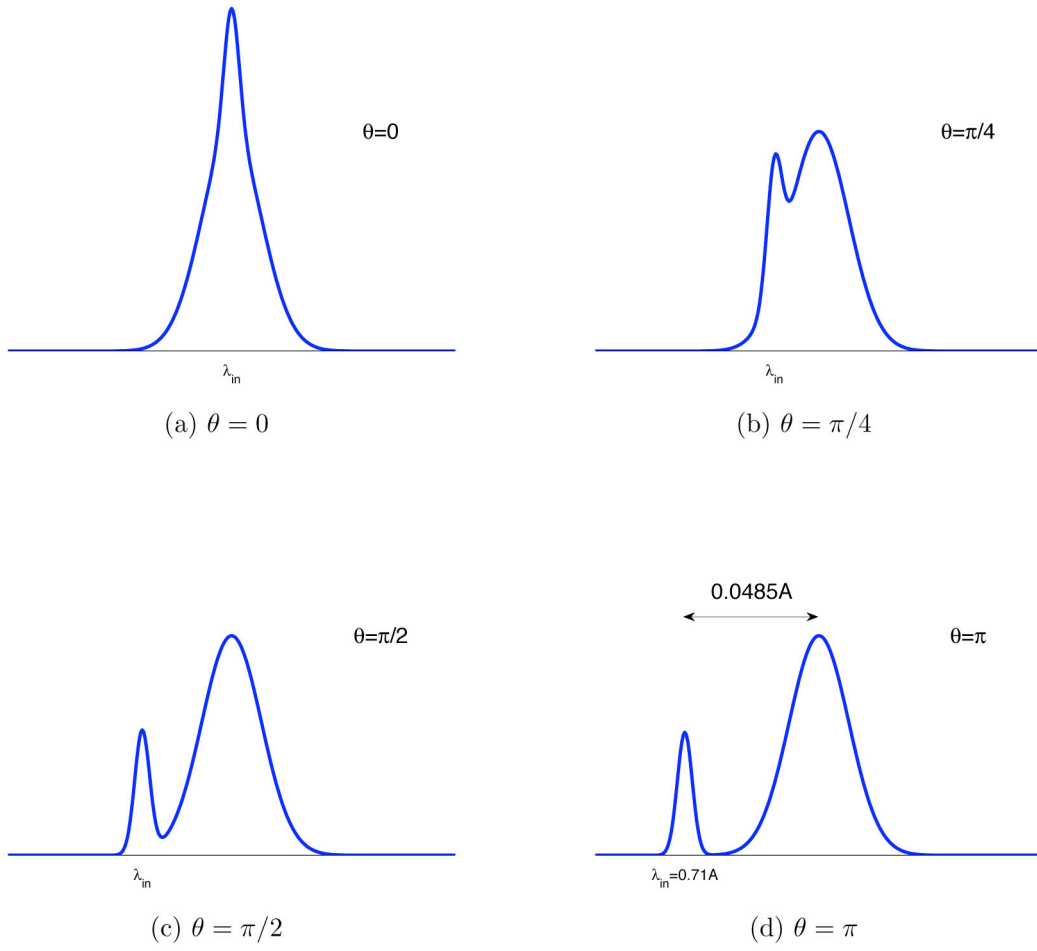
Compton Saçınımı: x-ışınlarını saçındıran elektronlar

Görünür ışık madde (elektronlar) tarafından saçındırıldığında, saçınmış ışık yaklaşık olarak gelen ışıkla aynı frekansa sahiptir. Compton (1922) x-ışınları için yaptığı gözlemlerde, saçınan ışığın dalga boyunun arttığını ve bu artışın geniş saçındırma açısı θ için daha fazla olduğunu saptamıştır. Geri saçınım ($\theta = \pi$) için dalga boyu kayması

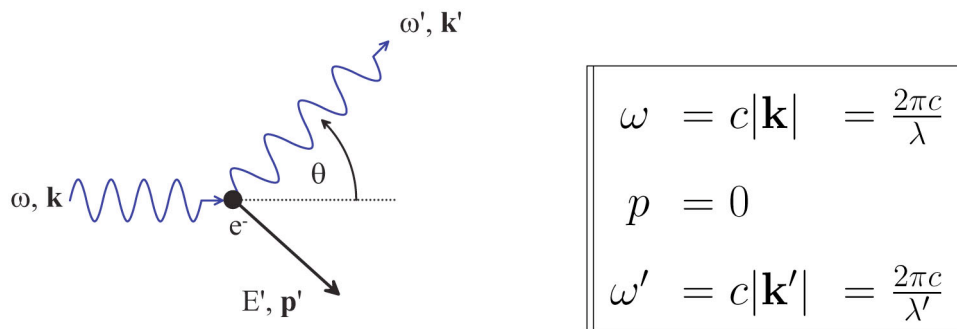


Şekil II: Compton Saçınımı

$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ olup, $\Delta\lambda = 4,85 \times 10^{-12}$ m değerine sahip olduğu ve bunun x-ışınlarının dalga boyundan bağımsız olduğu bulunmuştur. Compton bu durumu iki parçacık; bir electron ve bir x-ışını fotonu arasındaki bir saçınma süreci gibi yorumladı ve bu esnada enerji ve momentumun korunumu sağlanmıştır. Başlangıçta hareketsiz elektron daha sonra serbest bir parçacık gibi ele alınmıştır (atoma bağlı elektronun ilk enerjisi ~ 10 eV, x-ışını foton enerjisi ise 10 keV'dur.)



Şekil III: Compton Saçınımı (değişik açılarda)



Şekil IV: Compton Saçınımı

Elektron enerjisi:	$E = m_0 c^2$
	$E'^2 = p'^2 c^2 + m_0^2 c^4$
Momentum korunumu:	$\hbar \mathbf{k} = \mathbf{p}' + \hbar \mathbf{k}'$
Enerji korunumu:	$\hbar \omega = E' + \hbar \omega'$

Ödevinizde, bu kabullenmeler sonucunda bir dalga boyu kayması ortaya çıkacaktır:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta) \Rightarrow \text{Compton kayması} \quad (5-30)$$

ve burada $\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 0.024 \text{ \AA}$, sbt. olup, elektronun Compton dalga boyu olarak bilinir.

$\lambda_{dB} = \frac{h}{p}$ ise sanal momentumu $p = m_e c$ olan bir parçacığın deBroglie dalgaboyudur. Bu formül, kaymaya uğramış *esnek olmayan* saçınma pikini açıklar. $\lambda' = \lambda$ de gözlemlenen kaymamış *esnek* pik ise sıkıca bağlı iç-kabuk elektronlarının saçınmasıyla açıklanabilir. Bu durumda, atomun tamamı (10^4 kez büyük kütleli) momentum soğurur ve sonuçta Compton'un gözlemleyemediği daha küçük bir geri tepme enerji kaymasına yol açar. x-ışını fotonunun enerji kaybı, her bir fotonun saçınma sürecinde momentumun korunumunun bir sonucu olarak elektrona aktarılan KE den ileri gelmektedir. Eğer $h \rightarrow 0$ (yani $E = h\nu$ ve $p = \hbar k$ değerleri bireysel olarak fotonlarla ilgili olup, bunlar çok küçük olurlarsa, $\lambda_c = \frac{h}{m_e c} \rightarrow 0$ olur ve hiçbir kayma olamaz): Compton kayması, ışığın “tanecik” kuantumlanma doğasıyla ilgili bir **KM** etki olmaktadır. Compton saçınması, $E = \hbar \omega$ enerjisi ve $p = \hbar k = \frac{\hbar \omega}{c}$ momentumunu taşıyan bireysel fotonlar mevcut olduğunu ve elektronlarla ışık arasındaki etkileşmenin, momentum ve enerjinin korunumuna tabi olan bir saçınma süreci olduğunu göstermiştir.