Ders 17

Metindeki ilgili bölümler §2.3

BHS Hamilton İşlemcisinin Spektrumu (Devam)

Ders kitabında N'nin özdeğerlerinin dejenere ve negatif-olmayan tamsayılar oldukları ayrıntılı olarak gösteriliyor,

$$\lambda \equiv n = 0, 1, 2, \ldots .$$

İspatların özünde sayı işlemcisinin negatif-olmayan beklenen değere sahip olması gerekliliği yatıyor :

$$\langle\psi|N|\psi\rangle = \langle\psi|a^\dagger a|\psi\rangle = (\langle\psi|a^\dagger)(a|\psi\rangle) \geq 0$$

burada

$$\langle\psi|N|\psi\rangle = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a|\psi\rangle = 0.$$

Diğer taraftan, a, N'nin özdeğerini bir birim alçalttığı için, (boylandırmaya bağlı olarak) en düşük özdeğerli tek bir $|0\rangle$ özvektör olmalı, öyle ki

$$a|0\rangle = 0.$$

Böylece, N'nin spektrumunun dejenere olmadığı ve negatif olmayan tamsayılardan oluştuğu kolayca çıkarılabilir :

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Bundan dolayı, enerji spektrumu tamamen kesiklidir :

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ve enerji özvektörleri $|n\rangle$ ile etiketlenir. Bu sonuçlar, X ve P'nin Hilbert uzayında kendine eşlenik işlemciler olduğu (veya, eşit şekilde, a ve $a^\dagger$'ın Hilbert uzayı skaler çarpımına göre birbirinin eşleniği olduğu) kabulünden doğuyor.

Sonuç olarak,

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \qquad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \qquad \langle n|m\rangle = \delta_{nm}$$

elde edildiği ders kitabında gösteriliyor. "Temel durum" $|0\rangle$'ın enerjisinin $\frac{1}{2}\hbar\omega$ olduğunu ve

$$a|0\rangle = 0$$

sağladığını not edin.

Enerji özfonksiyonları

Basit harmonik salınıcıyı tanımladık ve Hamilton işlemcisinin spektrumunu hesapladık. Şimdi enerji özvektörlerinin, yani durağan durumlarının, bazı özelliklerini araştırıyoruz. Şüphesiz ki, bu $|n\rangle$ vektörlerinden herbiri, enerjinin $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ değerini aldığı kesinlikle bilinen bir durumu temsil eder. Bu durumlar, diğer bütün gözlenebilirlerin, özellikle konum ve momentumun, olasılık dağılımlarını da tanımlar. Konum olasılık dağılımını düşünelim, ki bu,

$$u_n(x) = \langle x|n\rangle$$

konum dalga fonksiyonları ile kontrol edilir. Bu fonksiyonları hesaplamak yeterince kolaydır. Örneğin, taban durumu dalga fonksiyonu, u_0'ı göz önüne alın; bu

$$au_0(x) = \langle x|a|0\rangle = 0$$

ifadesini sağlar.

$$au_n(x) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(X + \frac{i}{m\omega}P\right)u_n(x) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dx}\right)u_n(x)$$

olduğu için

$$\left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dx}\right)u_0(x) = 0$$

elde ederiz. Bu denklem kolayca çözülür ve boylandırılabilir bir Gaussiyen verir (alıştırma)

$$u_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{x_0}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2},$$

burada

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

problem tarafından ayarlanan bir uzunluk ölçeğidir ve ,görebileceğiniz gibi, Gaussiyen'in genişliğini belirler.

Burada, klasik ve kuantum rejimlerinin bağlantılı olduğu bir yol görebiliriz. Tabii ki, bir salınıcının klasik mekaniksel bir tarifi bu salınıcının taban durumu konumunun kesinlikle $x = 0$ olduğunu ima eder. Kuantum mekaniği bunun yerine $x = 0$ etrafında bir Gaussiyen olasılık dağılımı sağlar. Ancak x_0'ın "küçük" olması şartıyla, Gaussiyen'in genişliği ihmal edilebilir ve bu bakımdan, bu kuantum tasvir klasik tasvir ile birleşir. x_0 uzunluk boyutunda olduğu için "küçük" kelimesinde tırnak işaretleri kullandım; küçük olup olmadığını düşünmek onu bir başka uzunluk ölçeği ile kıyaslamaya bağlıdır. "Makroskobik olaylardan" konuşurken biz genellikle, mesela santimetre, mertebesinde uzunluk ölçekleriyle, gram mertebesinde kütlelerle ve saniye mertebesinde zamanla ilgileniriz. Böyle bir rejimde x_0 gerçekten çok çok küçüktür. Fakat, kuşkusuz ki, "mikroskobik" rejimde x_0 kayda değer olabilir.

"Uyarılmış durumlar" ($n > 0$),

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle$$

özelliğinden kolayca elde edilebilir (alıştırma), böylece,

$$u_n(x) = \left(\frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{2^n n!}x_0^{n+1/2}}\right)\left(-x_0^2\frac{d}{dx}+x\right)^n e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}.$$

Bileceğiniz gibi, bu formül, Hermite polinomlarını tanımlamak için standart "üreteç fonksiyonu" yöntemlerinden birini (boyutlu sabitler dışında) temsil eder. Bu nedenle, $u_n(x)$ Gaussiyen taban durumu ile bir Hermite polinomunun çarpımıdır. Ayrıntılı formüller için kitabınıza bakın.

Beklenen değerler

Durağan durum beklenen değerlerinin nasıl hesaplanacağını, ve elbette, bunların nasıl birşeye benzediğini görmek eğiticidir. Başlangıç olarak, konum ve/veya momentumda doğrusal olan gözlenebilirlerin durağan durum beklenen değerlerinin yok olacağını gözlemliyoruz :

$$\langle n|X|n\rangle = 0 = \langle n|p|n\rangle.$$

Bunu görmek için, sadece, böyle gözlenebilirlerin merdiven işlemcileri cinsinden doğrusal olduğunu dikkate alın ve (ortogonalite ile)

$$\langle n|a|n\rangle \propto \langle n|n-1\rangle = 0, \qquad \langle n|a^\dagger|n\rangle \propto \langle n|n+1\rangle = 0$$

elde elderiz. Konum ve momentumun beklenen değerlerinin durağan durumlarda yok olduğunu görmenin bir başka yolu

$$X \propto [P, H], \qquad P \propto [X, H]$$

(alıştırma) olduğuna dikkat etmektir. Buradan sonuç kolayca çıkar (alıştırma).

Diğer taraftan, konum ve momentumun ikinci mertebeden fonksiyonlarının sıfır beklenen değerleri olması gerekmez. Örneğin, taban durumunda (alıştırma)

$$\langle 0|X^2|0\rangle = \frac{x_0^2}{2}\langle 0|(a^{\dagger 2} + a^2 + a^\dagger a + aa^\dagger)|0\rangle = \frac{x_0^2}{2}.$$

Bu, taban durumu Gaussiyen konum olasılık dağılımının genişliği hakkında daha önce yaptığımız yorumla alay ediyor. $\langle P^2\rangle$ için benzer bir hesaplama

$$\langle 0|P^2|0\rangle = \frac{\hbar^2}{2x_0^2}$$

olduğunu gösterir. Konum ve momentumdaki dağılmaların (taban durumunda)

$$\langle \Delta X^2\rangle\langle \Delta P^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4}$$

sağladığını görürüz, ki bu, belirsizlik ilkesi ile uyuşumludur, ayrıca temel durumun bir “minimum belirsizlikli durum” olduğunu da gösterir. Uyarılmış durumlar minimum belirsizlikli durumlar değildir; doğrudan bir hesap

$$\langle \Delta X^2 \rangle \langle \Delta P^2 \rangle = (n + \frac{1}{2})\hbar^2$$

verir (alıştırma).