Yorumlamalar

Birinci eksiklik teoremi sadece aritmetik dili için değil, aritmetik dilinin çevrilebildiği başka diller için de geçerlidir. Bizim kullanacağımız "çeviri" kavramı Tarski, Mostowski ve Robinson' un *Undecidable Theories*[1] adlı kitabından gelir. □ , birinci düzeyden yüklemler dizgesini kapsayan ve bundan başkaca mantıki araçları içermesi ya da içermemesi mümkün olan bir dil olsun. Aritmetik dilini $\mathscr{L}$ ye çevirmek için, "x_0 bir doğal sayıdır" ı temsil etmek üzere $N(x_0)$ gibi bir $\mathscr{L}$ tamdeyimini, "$x_0 = 0$"ı temsil etmek üzere de $Z(x_0)$ gibi bir tamdeyimi seçelim. Bir de "x_1, x_0'ın ardılıdır", "$x_2 = (x_0 + x_1)$", "$x_2 = (x_0 \cdot x_1)$", "$x_2 = (x_0 \mathrm{E}\, x_1)$" ve "$x_0 < x_1$"i temsil etmek üzere $\mathscr{L}$'nin sırasıyla "$S(x_0, x_1)$", "$A(x_0, x_1, x_2)$", "$M(x_0, x_1, x_2)$", "$E(x_0, x_1, x_2)$" ve $L(x_0, x_1)$ tamdeyimlerini seçelim.

Örnek olarak, $\mathscr{L}$, mantıki olmayan tek sembolü "∈" ("elemanıdır") ikili yüklemi olan kümeler kuramının dili olsun. Aritmetik dili içinde aritmetik ifadeler oluşturma yöntemimiz John von Neumann' a bağlı kalacaktır.[2] Boş küme yani Ø 0'ı, {Ø} 1'i, {{Ø}}

1

[1] Amsterdam: North-Holland, 1953. Burada geliştirdiğimiz kavram ***göreli*** *yorum* denilen kavramdır.

2

[2] Ernst Zermelo tarafından öne sürülen daha önceki bir öneri, sayılar kuramını kümeler kuramına indirgemek için 0'ı boş küme ile ve bir ardılı en yakın öncelinin birim kümesiyle belirtmekti. Bu durumda 1'i {Ø} ile, 2'yi {{Ø}} ile, 3'ü {{{Ø}}} ile belirtiriz ve bu şekilde devam eder. Sadece aritmetik ile ilgileneceksek önerilerin biri öteki kadar iyidir. von Neumann' ın yönteminin genellikle tercih edilmesinin sebebi sorunsuz bir şekilde sonluötesine uzanmasıdır. Zermelo ve von Neumann' ın makalelerini Jean van Heijenoort' un *From Frege to Gödel* (Cambridge: Cambridge University Press, 1984)' inden okuyabilirsiniz. Sayılar kuramının kümeler kuramına çok sayıda ve eşit seviyede etkili indirgemelerinin oluşu, matematik felsefesi üzerinde ciddi ve rahatsızlık verici etkilere sahip olarak düşünülmüştür. Bkz.

2’yi temsil eder ve bu temsil, bir n sayısına karşılık n’ den küçük sayıları temsilen kullandığımız kümelerin kümesini alarak devam eder. Sayılar kuramını kümeler kuramına, rakamların belirli kümelere işaret ettiğini kabul ederek indirgediğimizi düşünebiliriz. İndirgeme açısından düşününce, bir sayı, öncellerinin kümesine eşittir diyebiliriz.

“Z(x)”, “$\sim(\exists y)\ y \in x$” olacaktır; bu, sıfır öğesini boş küme ile özdeşleştirir. Takip eden fonksiyon x’ i, $x \cup \{x\}$’e götüren işlem ile gösterilir; dolayısıyla “S(x,y)”yi “$(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (z \in x \vee z = x))$”e eşit alırız. “N(x)”, x’ in dört özelliği olduğunu söyleyecektir.

x geçişlidir: $(\forall y)(\forall z)((y \in x \wedge z \in y) \rightarrow z \in x)$.

x bağlantılıdır: $(\forall y)(\forall z)((y \in x \wedge z \in x) \rightarrow (y \in z \vee y = z \vee z \in y))$.

x iyi temellenmiştir: $(\forall y)((\exists z)(z \in y \wedge z \in x) \rightarrow (\exists z)((z \in x \wedge z \in y) \wedge$

$$\sim(\exists w)(w \in x \wedge w \in y \wedge w \in z))).$$

x'in eşiği yoktur: $(\forall y)((y \in x \wedge (\exists z)z \in y) \rightarrow (\exists z)(z \in x \wedge$

$$(\forall w)(w \in y \leftrightarrow (w \in z \vee w = z)))).$$

Üçüncü koşul bize matematiksel tümevarımın ilkesini veren koşuldur. Kümeler kuramının aksiyomlarının en sık rastlanan düzenlemesi, her kümenin iyi temellenmiş

Paul Benacerraf, “What Numbers Could Not Be”, Benacerraf ve Hilary Putnam (Dü.), *Philosophy of Mathematics,* 2.baskı (Cambridge: Cambridge University Press, 1984) içinde.

olduğunu söyleyen bir aksiyoma sahiptir. Böyle bir aksiyomun varlığı üçüncü maddeyi gereksiz kılar. Dördüncü madde her sayının ya 0 ya da bir ardıl olduğunu söyler.

Toplama, çarpma ve üst almayı kümeler kuramında açıklamak için önce İkili'nin küme kuramındaki mukabiline, kümelerin bir sıralı ikilisini tek bir küme olarak kodlayan bir fonksiyona[3] ihtiyaç vardır. Bu amaçla, herhangi bir a ve herhangi bir b kümesi için şu tanımı veririz:

$$< a.\ b.> =_{\mathrm{Def}} \{\{a\}, \{a.b\}\}.$$

Herhangi bir a, b, c ve d için, a = c ve b = d olduğunda, ve ancak böyle olduğunda, < a.b.> = < c, d > olduğunu ispatlamak kolaydır. Elimizde ikileme fonksiyonu olunca, "A(x,y,z)", M(x,y,z)" ve E(x,y,z) tamdeyimlerine, yinelemeli tanımları açık tanımlara dönüştürmek için kullandığımız alışılmış yöntemi uygulayarak ulaşabiliriz. "L(x,y)", "x ∈ y" demektir.

Çeviri planımızı bir kez belirledikten sonra aritmetik tamdeyimleri $\mathscr{L}$ 'ye şu yoldan çeviririz: Verili bir ϕ cümlesinde, fonksiyon işareti yuvalanımlarını eleriz ve ϕ' yi, ona mantıki olarak denk, barındırdığı bölümsüz tamdeyimler aşağıdaki yedi formdan birini alan bir tamdeyim olarak yazarız:

$$x_i = x_j$$

3

[1] Kullandığımız fonksiyon, temel fikir Norbert Weiner' e ait olsa da, Kazimierz Kuratowski tarafından tasarlanmıştı. İkisinin de makaleleri van Heijenoort cildinde bulunmaktadır.

$x_i < x_j$

$0 = x_i$

$x_j = sx_i$

$x_k = (x_i + x_j)$

$x_k = (x_i \cdot x_j)$

$x_k = (x_i \, E \, x_j)$

Birinciyi bir tarafa bırakıp diğerlerini, çakışmaların önlenmesinin gerektirdiği şekilde bağlı değişkenleri dönüştürerek, “$L(x_i,x_j)$”, “$Z(x_i)$”, “$S(x_i,x_j)$”, “$A(x_i,x_j,x_k)$”, “$M(x_i,x_j,x_k)$” ve “$E(x_i,x_j,x_k)$” ile sırasıyla değiştiririz. Son olarak “$(\forall x_i)$” ve “$(\exists x_i)$” yerine, “$(\forall x_i)(N(x_i) \rightarrow \ldots)$” ve “$(\exists x_i)(N(x_i) \wedge \ldots)$” geçer.

Örnek olarak (Q4)’ ü çevirelim; “$(\forall x)(\forall y)(x+sy) = s(x+y)$”. Önce bölümsüz tamdeyimlerin hepsinin istenilen formda olduğu denk bir cümle buluruz. Bunu yapmanın çeşitli yolları vardır; ancak hepsi, mantıki olarak denktir. Bunlardan bir tanesi şöyledir:

$(\forall x_0)(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(\forall x_4)(\forall x_5)\ (((\ x_2 = sx_1 \wedge x_3 = (x_0+x_2)) \wedge (\ x_4 = (\ x_0+x_1) \wedge x_5 = sx_4)) \rightarrow x_3 = x_5\ ).$

Gerekli değiştirimleri yaptıktan sonra şuna ulaşırız:

$(\forall x_0)(N(x_0) \rightarrow (\forall x_1)(N(x_1) \rightarrow (\forall x_2)(N(x_2) \rightarrow (\forall x_3)(N(x_3) \rightarrow (\forall x_4)(N(x_4) \rightarrow (\forall x_5)(N(x_5) \rightarrow (((\ S(x_1,x_2) \wedge A(x_0,x_2,x_3)) \wedge (\ A(x_0,x_1,x_4) \wedge S(x_4,x_5))) \rightarrow x_3 = x_5\ )))))))$

Verili bir Γ aritmetik kuramı ve $\mathscr{L}$'de ifade edilen bir $\boldsymbol{\Delta}$ kuramı için, $\boldsymbol{\Delta}$ aşağıdakilerin her birini veriyorsa, $\boldsymbol{\Delta}$ 'nın, Γ' yı yorumladığı söylenir:

Γ' nın her bir aksiyomunun çevirisi.

$(\exists x)(\forall y)((N(y) \wedge Z(y)) \leftrightarrow y = x)$.

$(\forall x)(N(x) \rightarrow (\exists y)(\forall z)((N(z) \wedge S(x,z)) \leftrightarrow z = y))$

$(\forall x)(\forall y)((N(x) \wedge N(y)) \rightarrow (\exists z)(\forall w)((N(w) \wedge A(x,y,w)) \leftrightarrow w = z))$

$(\forall x)(\forall y)((N(x) \wedge N(y)) \rightarrow (\exists z)(\forall w)((N(w) \wedge M(x,y,w)) \leftrightarrow w = z))$

$(\forall x)(\forall y)((N(x) \wedge N(y)) \rightarrow (\exists z)(\forall w)((N(w) \wedge E(x,y,w)) \leftrightarrow w = z))$

Bu cümleler, fonksiyon işareti yazımında yerleşik olan, neyin neyle bağıntıda olduğuna ilişkin koşulları açıklarlar.

Şu oldukça zayıf kümeler kuramı, Q' yu yorumlayabilmektedir:

$(\forall x)(\forall y)((\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$

$(\exists x)\sim(\exists y)y \in x$

$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall w)(w \in z \leftrightarrow (w \in x \vee w = y))$

$\boldsymbol{\Delta}$, yinelemeyle aksiyomlulaştırılmış bir kuram olsun ve Q bu kuramla yorumlanabiliyor olsun. $\mathscr{L}$deki bir kuramın "yinelemeyle aksiyomlulaştırılmış" olduğunu söylerken, $\mathscr{L}$nin açıklamalarına bir kod sayıları sisteminin makul bir şekilde atandığını kabul ediyorum. Burada bizim amaçlarımız bakımından bu kodlama için gerekli olacak şey, aritmetik bir cümleyi çevirisine götüren fonksiyonun yinelemeli olmasıdır. **Δ**’ nın yinelemeyle aksiyomlulaştırılmış olduğunu açıklamanın bir başka yolu da, **Δ**’ nın sonuçlar kümesinin fiilen sayılabilir olduğunu söylemektir - bu açıklama biçimi Church-Turing tezine dayanır. Bir diğer açıklama, **Δ**’ nın tek bir aksiyom taslağı ile aksiyomlulaştırılabileceğini söylemektir. Burada Robert Vaught’ un[4] bir teoremini kullanırız: Sonlu dağarcığa sahip bir dilde oluşturulmuş ve kendisinde Q'yu yorumlayabileceğimiz bir kuram, tek bir aksiyom taslağı tarafından aksiyomlulaştırılabilir ise, ve ancak böyleyse, yinelemeyle aksiyomlulaştırılmıştır.

Yinelemeyle aksiyomlulaştırılmış, Q’ nun yorumu olabilecek bir **Δ** kuramı için, **Δ**’ nın bütün teoremlerini kapsayan ve **Δ**’da çürütülebilecek bütün cümleleri dışlayan bir yinelemeli D kümesi olamaz. Çünkü böyle bir küme olsaydı, çevirileri, D’ nin elemanları olan aritmetik cümlelerin kümesi, Q’ nun teoremlerini kapsayan ve Q’ da çürütülebilecek cümleleri dışlayan yinelemeli bir aritmetik cümleler kümesi olurdu. Buradan anlaşılır ki, **Δ** tutarlı ise eksiktir.

Yorum kavramımız aritmetik dilinin bir tamdeyiminin bir $\mathscr{L}$ tamdeyimi olarak çevrilmesini gerektirir. Bir aritmetik teriminin bir $\mathscr{L}$ terimi olarak çevrilmesine gerek yoktur; çünkü $\mathscr{L}$, kümeler kuramı dili gibi, değişkenlerden başka hiçbir terimi olmayan bir dil olabilir. Bunun yerine yapabileceğimiz şey, aritmetik terimlerini $\mathscr{L}$’deki belirli

---

4

[1] “Axiomatizability by a Schema”, *Journal of Symbolic Logic* 32 (1967): 473-479

betimlemelere çevirmektir. Örneğin, "[2]" sayısının çevirisi şudur: "$(\iota x)(\exists y)(\exists z)((N(x) \wedge N(y) \wedge N(z)) \wedge (Z(z) \wedge S(z,y) \wedge S(y,x)))$." Daha sonra da belirli betimlemeleri $\mathscr{L}$ tamdeyimlerinden elemek için Russell' ın yöntemini[5] kullanabiliriz. Şimdilik bu zorluğu görmezden gelip, $\mathscr{L}$ tamdeyimleri, $\mathscr{L}$ deki rakamlarla belirtilen kod sayıları tarafından temsil ediliyormuş gibi davranacağım; tıpkı aritmetik dilinde olduğu gibi.

$\psi(x)$, bir $\mathscr{L}$ tamdeyimi olsun. Aritmetik dilinde uygulanan kendine gönderim lemması bize bir ϕ aritmetik cümlesi verir. Şöyle ki:

Q $\vdash$ ($\phi \leftrightarrow (\exists y)($ [□ϕ□] $\wedge\ \psi$ (y)' nin $\mathscr{L}$ ye çevrisi y' dir.)

Burada, bir aritmetik tamdeyiminin kod sayısını, o tamdeyimin çevirisinin kod sayısına götüren fonksiyonun, bir Σ formülü ile temsil edilebiliyor olmasından faydalanıyorum. Bu durumda:

Q $\vdash$ $(\forall y)([\ulcorner \phi \urcorner] \leftrightarrow y = [\ulcorner \theta \urcorner]$ 'in $\mathscr{L}$ ye çevirisi y' dir.)

Δ, Q' yu yorumladığından,

$\Delta \vdash (\theta \leftrightarrow \psi(\ulcorner \theta \urcorner))$.

5

"On Denoting", *Mind* yeni seri 14 (1905): 479-493. Russell' ın açıklamalarından Mantık I' de bahsetmiştik.

Öyleyse kendine gönderim lemması sadece aritmetik dili için değil, aritmetik dilinin çevrilebildiği diller için de geçerlidir.

Şimdiye kadar aritmetik dilindeki “=” işaretinin, $\mathscr{L}$ nin “=” işareti olarak çevrildiğini kabul ettim. Fakat bu zorunlu değildir. Yorumlayıcı kuramımız **Δ**’ nın, Γ teoremlerini ispatlarken kullanılan özdeşlikle ilgili bir takım olgulara tekabül eden önermeleri ispatladığını kesinleştirebilirsek, I(x,y) biçimindeki $\mathscr{L}$ tamdeyimini “x = y” nin çevirisi olarak seçebiliriz. Daha belirli olarak, **Δ** , “I” nın bir denklik bağıntısını adlandırdığını ispatlamalıdır:

$$(\forall x)(N(x) \rightarrow I(x,x))$$

$$(\forall x)(\forall y)((N(x) \wedge N(y)) \rightarrow (I(x,y) \rightarrow I(y,x)))$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((N(x) \wedge N(y) \wedge N(z)) \rightarrow ((I(x,y) \wedge I(y,z)) \rightarrow I(x,z)))$$

Ve de “I” nın bir tıpatıplık olduğunu ispatlamalıdır:

$$(\forall x)(\forall u)((N(x) \wedge N(u)) \rightarrow ((Z(x) \wedge Z(u)) \rightarrow I(x,u)))$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall u)(\forall v)((N(x) \wedge N(y) \wedge N(u) \wedge N(v)) \rightarrow (((S(x,y) \wedge S(u,v)) \wedge I(x,u)) \rightarrow I(y,v)))$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)(\forall v)(\forall w)((N(x) \wedge N(y) \wedge N(z) \wedge N(u) \wedge N(v) \wedge N(w)) \rightarrow (((A(x,y,z) \wedge A(u,v,w)) \wedge (I(x,u) \wedge I(y,v))) \rightarrow I(z,w)))$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)(\forall v)(\forall w)((N(x) \wedge N(y) \wedge N(z) \wedge N(u) \wedge N(v) \wedge N(w)) \rightarrow (((M(x,y,z) \wedge M(u,v,w)) \wedge (I(x,u) \wedge I(y,v))) \rightarrow I(z,w)))$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)(\forall v)(\forall w)((N(x) \wedge N(y) \wedge N(z) \wedge N(u) \wedge N(v) \wedge N(w)) \rightarrow (((E(x,y,z) \wedge E(u,v,w)) \wedge (I(x,u) \wedge I(y,v))) \rightarrow I(z,w)))$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall u)(\forall v)((N(x) \wedge N(y) \wedge N(u) \wedge N(v)) \rightarrow (((I(x,u) \wedge I(y,v)) \wedge L(x,y)) \rightarrow L(u,v)))$$