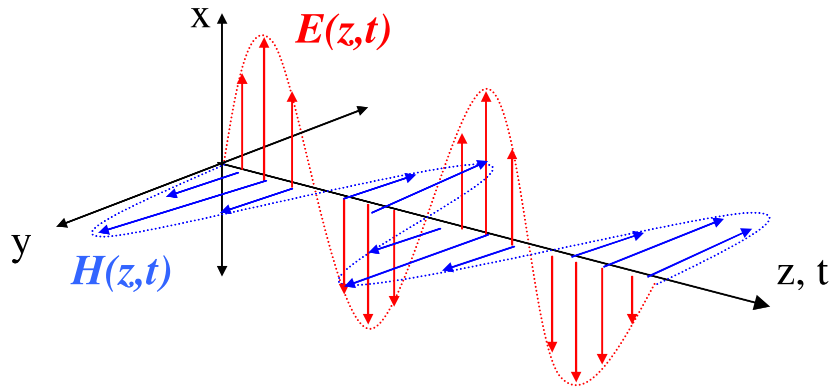
2. Ders

Boşlukta Elektromanyetik (Işık) Dalga



Bu bölümü bitirdiğinizde,

- Maxwell denklemlerini sağlayan elektrik ve manyetik alanların klasik dalga denklemini sağladığı; dalganın boşluktaki yayılma hızının ışık hızına eşit olduğu,
- Işığın, elektrik ve manyetik alanlardan oluşan elektromanyetik bir dalga olduğu,
- Işığın enine bir dalga olduğu,
- Faz ve grup hızları,
- Poynting vektör,
- Işığın kesikli (kuantum) doğası

konularında bilgi sahibi olacaksınız.

İkinci Ders: İçerik

- Maxwell Denklemleri
- Boşlukta Maxwell Denklemleri ve Çözümler
- Işığı Oluşturan Elektrik ve Manyetik Alanlar Arasındaki İlişki
- Faz ve Grup Hızları
- Işık ile İletilen Enerji
- Işığın Kesikliliği

Maxwell Denklemleri

J. C. Maxwell, elektrik ve manyetizmaya yönelik çalışmaları birleştirerek ışığın elektromanyetik tabiatlı olduğunu göstermiştir.

Maxwell denklemleri en genel olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir

Del operatörü :

$$\vec{\nabla} \equiv \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$$ Gauss Yasası- Elektrik

$$\vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{H}} = 0$$ Gauss Yasası- Manyetik

$$\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{E}} = -\mu_o \frac{\partial \vec{\boldsymbol{H}}}{\partial t}$$ Faraday Yasası

$$\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{J}}$$ Amper Yasası

$$\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{H}} = \underbrace{\varepsilon_o \frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}}_{} + \vec{\boldsymbol{J}}$$ Maxwell'in katkısı ile Amper Yasası

Burada; ***E*** elektrik alan, ***H*** manyetik alan, ρ uzaysal yük yoğunluğu, ***J*** ise akım yoğunluğudur; ε_o boş uzayın elektrik, μ_o ise boş uzayın manyetik geçirgenliği (permittivity) olup sayısal değerleri:

ε_o=8.85×10^{-12} F/m (Boş uzayın elektrik geçirgenliği)

μ_o=4π×10^{-9} H/m (Boş uzayın manyetik geçirgenliği)

Boşlukta Elektromanyetik Dalga-1

Bu denklemler boşluk için yazılarak çözümleri bulunabilir.

Boşlukta, akım yoğunluğu **J**=0 ve yük yoğunluğu ρ=0 olacağından Maxwell denklemleri simetrik bir şekil alır.

	Genel		Boşluk
(1)	$\vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_o}$	$\Longrightarrow$	$\vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{E}} = 0$
(2)	$\vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{H}} = 0$	$\Longrightarrow$	$\vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{H}} = 0$
(3)	$\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{E}} = -\mu_o \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{H}}}{\partial t}$	$\Longrightarrow$	$\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{E}} = -\mu_o \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{H}}}{\partial t}$
(4)	$\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{H}} = \varepsilon_o \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t} + \vec{\boldsymbol{J}}$	$\Longrightarrow$	$\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{H}} = \varepsilon_o \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$

E ve ***H*,** hem konumun hem de zamanın fonksiyonları olduğundan vektörel olarak en genel şekilde aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$\vec{\boldsymbol{E}}(x,y,z;t) = E_x(x,y,z;t)\hat{i} + E_y(x,y,z;t)\hat{j} + E_z(x,y,z;t)\hat{k}$$

$$\vec{\boldsymbol{H}}(x,y,z;t) = H_x(x,y,z;t)\hat{i} + H_y(x,y,z;t)\hat{j} + H_z(x,y,z;t)\hat{k}$$

Burada 6 bileşen (3 ***E*** alan, 3 de ***H*** alan bileşeni) ve 4 değişken (3 konum (x,y,z) ve zaman (*t*)) vardır

Boşlukta Elektromanyetik Dalga-2

Boşlukta Maxwell denklemlerini sağlayan elektrik ve manyetik alanları nasıl eş zamanlı olarak çözeriz?

Öncelikle elektrik alan ($\vec{E}$) için çözüm bulalım; 3. denklemin dönüsünü (curl) alıp, manyetik alan (curl$\vec{H}$) yerine denklem (4)'yi koyarsak

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (4)$$

$$(3) \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\mu_o \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\mu_o \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{H})$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\mu_o \frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right]$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\mu_o\varepsilon_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Vektörel eşitlik $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\nabla^2\vec{E} + \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\vec{E})$ kullanıldığında

Herhangi bir $\vec{A}$ vektörü
$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = -\nabla^2\vec{A} + \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\vec{A})$
şeklinde yazılabilir

$$-\nabla^2\vec{E} + \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\vec{E}) = -\mu_o\varepsilon_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Boş uzayda ρ=0 olduğu için $\vec{\nabla}.\vec{E} = 0$

$$\boxed{\nabla^2\vec{E} = \mu_o\varepsilon_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

Boşlukta Elektromanyetik Dalga-3

$$\nabla^2 \vec{\boldsymbol{E}} = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}$$

Klasik Dalga Denklemi

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

v= dalganın hızı (faz)

Maxwell denklemlerini sağlayan elektrik alan, klasik dalga denklemi şeklindedir. Açık şekilde yazılırsa

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{\boldsymbol{E}}(x,y,z;t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{E}}(x,y,z;t)}{\partial t^2}$$

Dalganın hızı: $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}}$

Dalganın ilerleme hızı:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}} = \frac{1}{\sqrt{(4\pi x10^{-7}).(8,85x10^{-13})}} = 2,99\times10^8 \ \mathrm{m/s}$$

(Boş uzayda elektromanyetik dalganın (ışığın) yayılma hızı)

* *Işık hızı diğer hızlar gibi v ile değil de c ile gösterilir. Bu gösterim, Latince "hızlı" anlamına gelen "celer" kelimesinden gelmektedir.*

E alanının sağladığı dalga denklemindeki hız, tam olarak deneysel olarak ölçülen ışığın boşluktaki hızına eşittir. Maxwell denklemlerini sağlayan ***H*** manyetik alanın da aynı sonucu verdiği gösterilebilir. Bu önemli sonuç, ışığın elektrik ve manyetik alanlardan oluşan elektromanyetik bir dalga olduğunu gösterir.

Boşlukta Elektromanyetik Dalga-4

Elektrik ve manyetik alanın sağladığı diferansiyel denklemler:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad \nabla^2 \vec{H} = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Bu denklemlerin her ikisi de $\nabla^2 \Phi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$ dalga denklemi şeklindedir.

Dalganın hızı: $\frac{1}{v^2} = \frac{1}{c^2} = \varepsilon_o \mu_o$

Bu (dalga) denklemlerinin çözümleri nedir?

Basitlik olması açısından üç boyutta yazılan yukarıdaki dalga denklemini bir boyut (z-doğrultusunda ilerleyen dalga) için yazıp, çözmeye çalışalım.

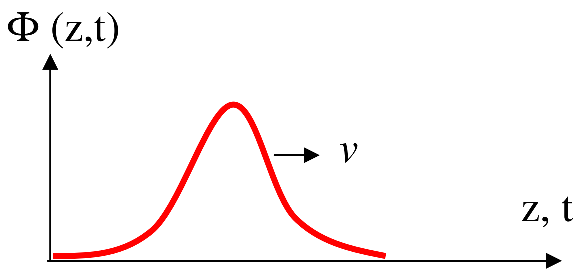
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

3 boyutta dalga denklemi (dalga, herhangi bir ***r*** doğrultusunda ilerliyor)

Φ (x,y,z;t) => Φ(z;t)

$$\frac{\partial^2 \Phi(z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi(z,t)}{\partial t^2}$$

1 boyutta dalga denklemi (dalga, z doğrultusunda ilerliyor)



Burada, z dalganın ilerleyiş doğrultusunu, t zamanı, v ise dalganın yayılma hızını (faz hızını) göstermektedir.

Boşlukta Elektromanyetik Dalga-5

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

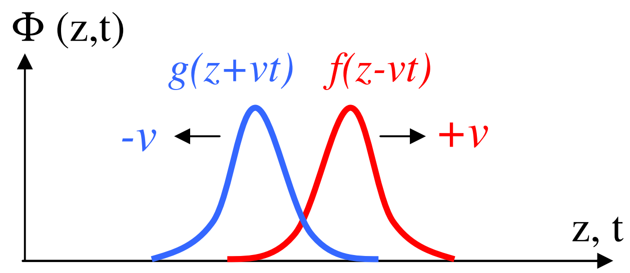
Bu diferansiyel (dalga) denklemin en genel çözümü:

$$\Phi(z,t)=f(z-vt)+g(z+vt)$$

şeklinde verilir ve dalga denkleminin çözümünü sağlar.

f(z-vt) ve *g(z+vt)* şeklinde verilen çözümlerde *f* ve *g* fonksiyonlarının sadece argümanının (uzay(z) ve zaman(t) değişkenleri) özel şekilde olması (z±vt şeklinde) yeterlidir; dalganın şeklini belirleyen *f* ve *g*'nin nasıl olduğu önemli değildir! (Argümanı z±vt olan herhangi bir *f* veya *g* fonksiyonu dalga denklemini sağlayacaktır).

Çözümler, bu durumda ilerleyen dalga şeklinde olacaktır.



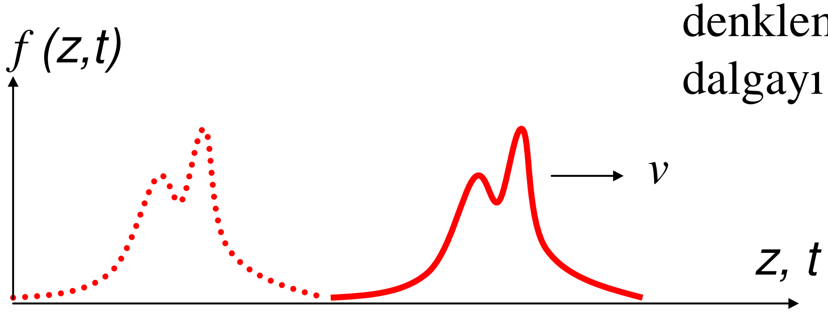
Fiziksel olarak *f(z-vt)* sağa (+z), *g(z+vt)* ise sola (-z) doğru giden dalgayı göstermektedir.

Boşlukta Elektromanyetik Dalga-6

Buna göre, örneğin aşağıdaki z-ekseni boyunca v hızı ile ilerleyen darbe şeklindeki dalga, darbenin şekli ne olursa olsun, argümanı (z-vt) şeklinde olduğu sürece dalga denklemini sağlayacaktır ve +z doğrultusunda ilerleyen bir dalgayı temsil edecektir.

$$f(z,t) = 3e^{-(z-vt)^2}$$

Darbenin değişkenleri (z-vt) şeklinde olduğu için dalga denklemini sağlar, ilerleyen bir dalgayı temsil eder.



Ancak yandaki f fonksiyonu,

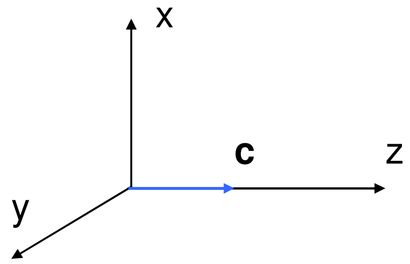
$$f(z,t) = 3\ln(z)e^{-vt}$$

Darbenin değişkenleri (z-vt) şeklinde olmadığı için dalga denklemini sağlamaz, ilerleyen dalgayı temsil etmez!

dalga denkleminin çözümü ***değildir!*** çünkü fonksiyonun uzay (z) ve zamana (t) bağlılığı tam olarak (z-vt) şeklinde değildir!

Boşlukta Elektromanyetik Dalga-7

Klasik dalga denkleminin çözümüne ilişkin bildiklerimizi kullanarak Maxwell denklemlerini sağlayan elektrik (ve manyetik) alanı bulabiliriz. Önce elektrik alan için çözümleri bulalım.



Yayılma doğrultusu +z-yönünde seçilirse dalga denkleminin çözümü

$$f(z - vt) \Rightarrow \vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(z - ct)$$

şeklini alır. Dalga denklemini sağlayan elektrik alan vektörel bir nicelik

$$\vec{E}(z - ct) = \hat{i}E_x(z - ct) + \hat{j}E_y(z - ct) + \hat{k}E_z(z - ct)$$

olduğundan alanın her bileşenini bulmak gerekir.

Çözümü aranan elektrik alanın, Maxwell denklemlerini sağlaması gerektiğinden yukarıdaki alan bileşenleri Maxwell denklemlerinden bulunabilir.

Boşlukta Elektromanyetik Dalga-8

(1) Maxwell denklemine göre $\vec{\nabla}.\vec{E} = 0$ $\Longrightarrow$ $\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$

olması gerektiğinden her bileşenin türevinin ayrı ayrı sıfır olması gerekir.

$$\frac{\partial E_x(z-ct)}{\partial x} = 0 \quad \Downarrow \quad E_x = keyfi$$

$$\frac{\partial E_y(z-ct)}{\partial y} = 0 \quad \Downarrow \quad E_y = keyfi$$

$$\frac{\partial E_z(z-ct)}{\partial z} = 0 \quad \Downarrow \quad E_z = 0$$

Elektrik alanın E_x ve E_y bileşenleri z değişkenini içermediğinden z'ye göre türevleri sıfır olacaktır. Dolayısı ile alanın x ve y bileşenleri sıfırdan farklı, keyfi bir değer olabilir.

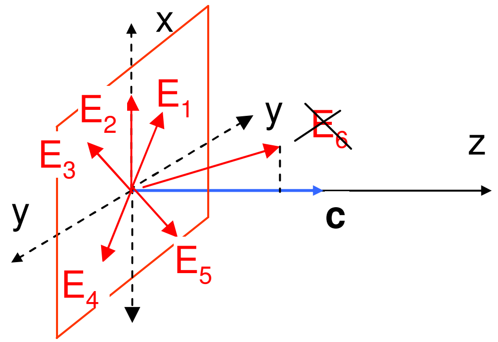
Sadece $E_z(z,t)$ bileşeni z'nin fonksiyonu olduğundan türevin her zaman sıfır olması koşulunun sağlaması için E_z bileşeninin sıfır olması gerekir.

Boşlukta Elektromanyetik Dalga-9

Maxwell denklemlerinin bir sonucu olarak alan bileşenlerine getirilen bu kısıtlama ışığın (en genel olarak elektromanyetik dalgaların) önemli bir özelliğidir.

Önemli Sonuç: Maxwell denklemlerini sağlayan ***elektrik*** alanın yayılma doğrultusunda hiç bir bileşeni olmayacaktır; ***E*** alanı tümüyle yayılma doğrultusuna (burada z doğrultusu) dik düzlemde (burada xy-düzlemi) bulunacaktır.

$$\frac{\partial E_z(z-ct)}{\partial z}=0 \Rightarrow E_z=0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{E}(z-ct)=\hat{i}E_x+\hat{j}E_y$$

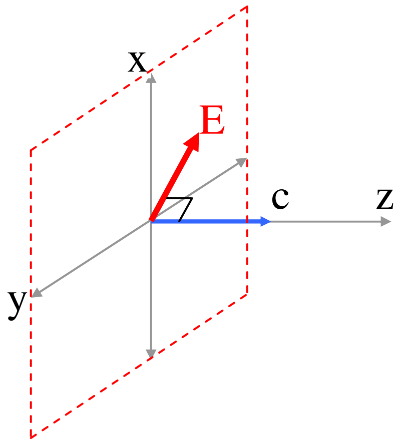


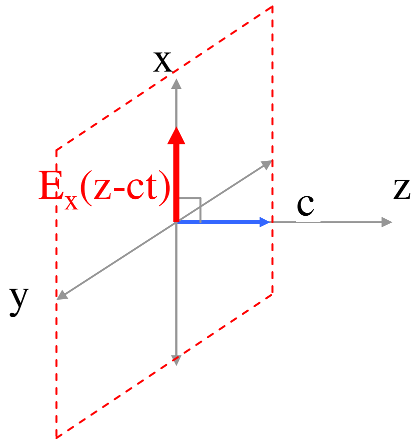
Elektrik alanın yayılma doğrultusuna dik düzlem içinde herhangi bir doğrultuda bileşeni (E_1-E_5) olabilir.

Maxwell denklemleri, elektrik alanın dalganın ilerleme doğrultusuna dik yönde enlemesine (transverse) titreşim yapacağını öngörmektedir. ***Yani ışık enlemesine bir dalgadır (TransverseElectric (TE))***

Boşlukta Elektromanyetik Dalga-10

Basitlik açısından yine özel bir duruma bakalım. Elektrik alanın sadece x-doğrultusunda (E_x) olduğunu düşünelim ($E_y=0$) (uygun koordinat sistemi seçerek bu koşul her zaman sağlanabilir)





$$\vec{\boldsymbol{E}}(z-ct)=\hat{i}E_x+\hat{j}E_y \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{E}}(z-ct)=\hat{i}E_x$$

Şimdiye kadar dalga denklemini sağlayan genel çözümün özelliklerini (dalga denkleminin çözümlerinden uzay ve zaman değişkenleri arasındaki ilişkiyi) ve vektörel bir nicelik olan elektrik alanın bileşenlerini (1. Maxwell denkleminden) bulmaya çalıştık.

Henüz dalganın şekli hakkında herhangi bir şey söylemedik. Dalganın sağlayacağı genel şartları belirledikten sonra şimdi dalganın (elektrik alanın) şeklini bulabilecek konumdayız.

Boşlukta Elektromanyetik Dalga-11

Maxwell denklemlerini sağlayan elektrik alanın (dalga denkleminin) çözümünün

$$\vec{E}(z,t) = \hat{i}E_{ox}\sin(z-ct)$$

şeklinde periyodik çözümleri içeren bir düzlem dalga olduğunu düşünebiliriz.

Burada E_{ox} genlik, z ilerleme doğrultusu, t zaman, c ise dalganın hızıdır.

Çözüm olarak düzlem dalgaları seçmemiz gerçek çözümü etkilemez çünkü matematik bilgilerimizden herhangi bir dalga şeklini her zaman düzlem dalgalar cinsinden ifade edebiliriz (Fourier dönüşümü ile).

Düzlem dalga çözümleri, dalga denklemini ve aynı zamanda Maxwell denklemlerini sağlayacaktır.

Yukarıdaki çözümde t=0, z=0 da (orjinde) alanın değeri $E_x(z,t)=E_{ox}\sin(z-ct)=0$ ki bu özel durumu gösterdiğinden argümandaki (z-ct) terimine ϕ gibi terim ekleyerek t=0 ve z=0 da dalganın sıfırdan farklı bir değer almasını sağlayabiliriz.

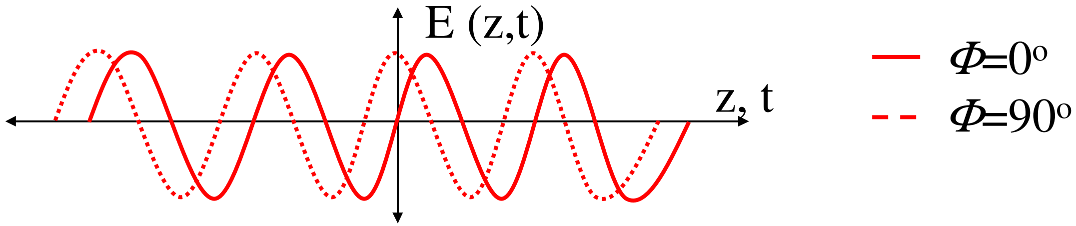
Ayrıca argümanı, k gibi bir sayı ile çarparsak çözümü daha da genelleştirmiş oluruz. k, katsayısının fiziksel olarak ne anlama geldiği ileride ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

Boşlukta Elektromanyetik Dalga-12

Bu durumda yukarıdaki çözüm daha genel bir şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\vec{\boldsymbol{E}}(z,t) = \hat{i}E_{ox}\sin\left[k(z-ct)+\phi\right]$$

Faz açısına göre elektrik alanın uzay ve zamandaki değişimi



Dolayısı ile faz farkının değerine bağlı olarak dalga denklemi sinüs veya kosinüs fonksiyonları (periyodik fonksiyonlar) ile ifade edilebilir.

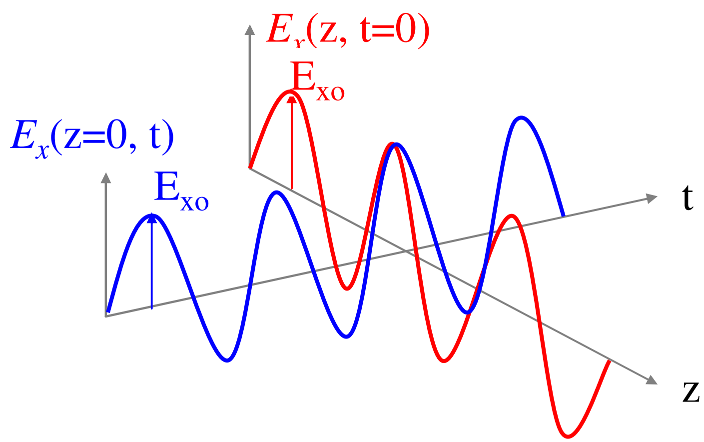
$$\vec{\boldsymbol{E}}(z,t) = \hat{i}E_{ox}\sin\left[k(z-ct)+90^{o}\right] = \hat{i}E_{ox}\cos\left[k(z-ct)\right]$$

Boşlukta Elektromanyetik Dalga-13

Artık dalga denklemine (ve Maxwell denklemlerine) aradığımız çözümü gözümüzde canlandırabilecek durumdayız.

$$\vec{\boldsymbol{E}}(z,t)=\hat{i}E_{ox}\sin\left[k(z-ct)+\phi\right]$$

Elektrik alan (E) hem zamanda hem de uzayda periyodik salınım yapmaktadır. Alanın uzaydaki (zamandaki) değişimini incelemek için zaman (uzay) değişkeni sabit tutularak dalganın konuma (zamana) göre değişimi incelenebilir.



Elektrik alanın uzay ve zamandaki bu periyodik davranışı, uzay ve zamandaki periyotlarını belirleyen nicelikler tanımlanarak dalga hareketini bu nicelikler cinsinden daha derli toplu bir şekilde yazmak mümkün olacaktır. Ayrıca dalga denklemini sağlayan elektrik alanın uzaydaki ve zamandaki periyodikliği arasında nasıl bir ilişki olduğu, dalganın yayılma hızının dalgayı karakterize eden bu periyodik nicelikler cinsinden nasıl ifade edildiği bilinince dalga hareketi daha anlaşılır olacaktır.

Bir sonraki adım dalganın uzay ve zaman periyodikliğini karakterize eden nicelikleri bulmak olacaktır.

Dalgaboyu-Dalgasayısı

Dalga denkleminin çözümü olan elektrik alanın uzaysal değişimine bakalım (t=0).

$$\vec{E}(z,t) = \hat{i}E_{ox}\sin\left[k(z-ct)+\phi\right]$$

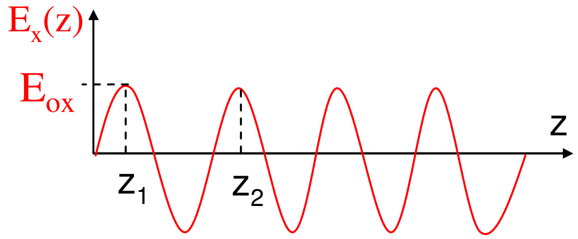
Bu, dalganın anlık olarak fotoğrafını çekmeye benzer.

$$E_x(z,0) = E_{ox}\sin\left[kz+\phi\right]$$

Alanın, konuma göre değişimi periyodik olduğundan ardışıl iki maksimum noktaya karşı gelen konumlar (z_1 ve z_2);

$$kz_1+\phi= \pi/2 \;\Rightarrow E_x(z_1,0)=E_{ox}$$

$$kz_2+\phi=5\pi/2 \;\Rightarrow E_x(z_2,0)=E_{ox}$$



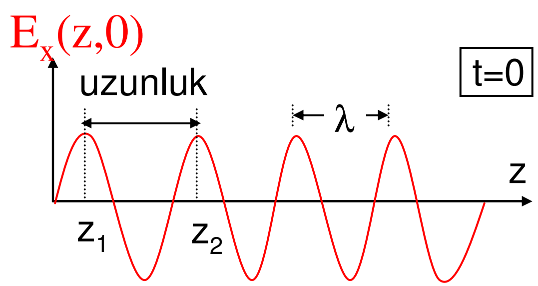
Ardışık iki nokta arasındaki fark, dalganın uzayda kendini tekrar ettiği uzunluğa, uzaysal periyot'a karşı gelir.

$$k(z_2-z_1) = 5\pi/2 - \pi/2 = 2\pi$$

Buradan ***uzaysal periyot*** (z_2-z_1) tanımlanabilir ve bu niceliğe ***dalgaboyu*** denir.

Dalgaboyu (λ), dalganın uzayda kendisini tekrar ettiği mesafedir; birimi metredir.

Dalgaboyu $\lambda \equiv z_2 - z_1 = \dfrac{2\pi}{k}$



Dalgaboyunun tersi ($\bar{k} \equiv 1/\lambda$), uzaysal frekans veya dalga sayısı olarak bilinir; birimi m^{-1} dir.

Dalga sayısı $\bar{k} \equiv \dfrac{1}{\lambda}$

Periyot-Frekans

Elektrik alanın $\vec{E}(z,t) = \hat{i}E_{ox}\sin\left[k(z-ct)+\phi\right]$ zamansal değişimine bakalım (z=0).

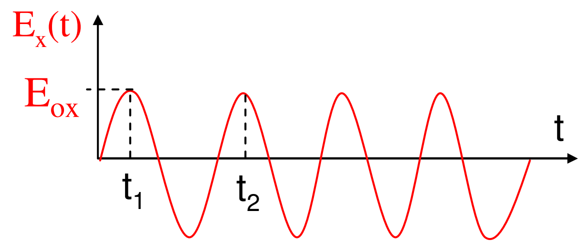
Bu, bir noktada dalganın video çekimini yapmaya benzer.

$$E_x(0,t) = E_{ox}\sin\left[kct+\phi\right]$$

Dalganın, zamana göre değişimi periyodik olduğundan ardışıl iki maksimum noktaya karşı gelen zamanlar (t_1 ve t_2);

$$kct_1+\phi= \pi/2 \Rightarrow E_x(0,t_1)=E_{ox}$$

$$kct_2+\phi=5\pi/2 \Rightarrow E_x(0,t_2)=E_{ox}$$



Ardışık iki zaman arasındaki fark, dalganın zamanda kendini tekrar ettiği süreye, zamansal periyot'a karşı gelir.

$$kc(t_2-t_1) = 5\pi/2 - \pi/2 = 2\pi$$

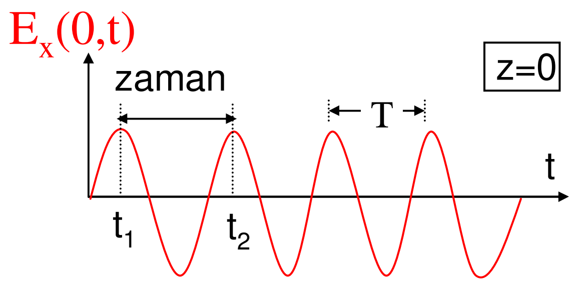
Buradan ***zamansal periyot*** (t_2-t_1) tanımlanabilir ve bu niceliğe kısaca ***periyot*** denir.

Periyot (T), dalganın bir tam salınım yapması için geçen süredir; birimi saniyedir.

Periyot $T \equiv t_2 - t_1 = \dfrac{2\pi}{ck}$

Periyotun tersi frekans (ν) dır ve birim zamanda salınım sayısıdır; birimi 1/s veya yaygın şekli ile Hertz (Hz) dir.

Frekans $\nu \equiv \dfrac{1}{T}$



Optoelektronik teknolojisinde kullanılan dalganın frekansı 10^{11}-10^{16} Hz arasındadır

Açısal Nicelikler-1

Dalganın uzay ve zaman içinde sıklıkları (frekansları) tanımlandı. Bu tanımlar:

- *Dalga sayısı* ($\bar{k}$), dalganın birim uzunluk içinde kendini kaç kez tekrar ettiğinin,
- *Frekans* (ν) ise dalganın birim zamanda kendini kaç kez tekrar ettiğinin ölçüsüdür.

Bu frekansları *açısal frekanslar* cinsinden ifade etmek daha kullanışlı olur.

Uzaysal Açısal Frekans

$$k = 2\pi\bar{k}$$

k=dalga vektörü (rad/m) $\bar{k}$=dalga sayısı (1/m)

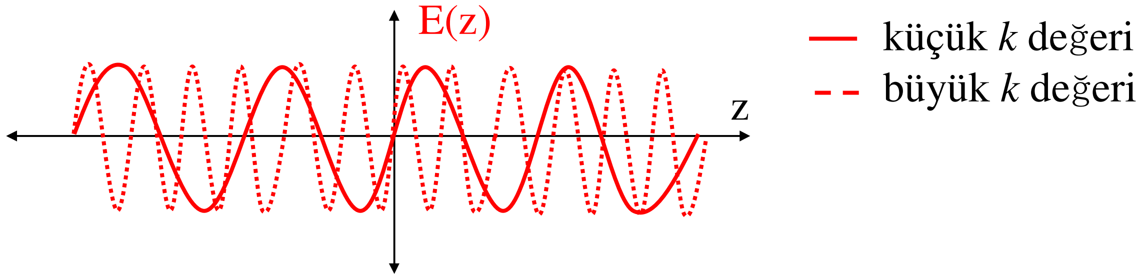
Zamansal Açısal Frekans

$$\omega = 2\pi\nu$$

ω=açısal frekans (rad/s) ν=frekans(1/s)

Görüldüğü gibi, daha önce dalga çözümünü genelleştirmek için yazılan k katsayısı fiziksel olarak dalgaboyunun tersine eşit olup açısal dalga sayısını gösterir. Dalga sayısı, üç boyutta vektörel bir niceliktir ve ***dalga vektörü*** olarak adlandırılır.

Dalga vektörü k'nın değerine bağlı olarak salınımdaki değişme



Dalga vektörü

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{k}$$

büyüklüğü => $\bar{k} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ (dalga sayısı)

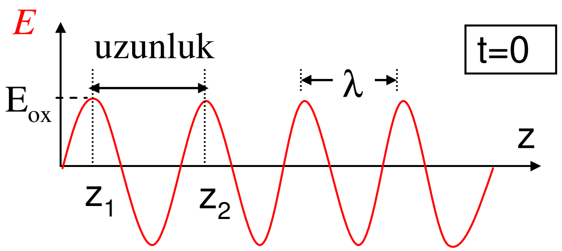
yönü ise dalganın ilerleme $\hat{k}$ (faz hızının) yönündedir.

Açısal Nicelikler-2

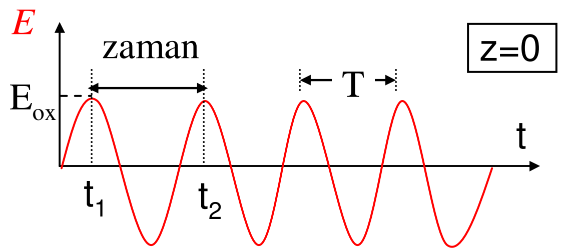
Tanımlanan bu yeni nicelikler cinsinden elektrik alan yeniden yazılabilir:

$$E(z,t) = E_{ox}\sin\left[k(z-ct)+\phi\right]$$

Uzaysal Değişim



Zamansal Değişim



$\dfrac{2\pi}{k} \equiv \lambda$	Dalgaboyu	$\lambda = cT$	$\dfrac{2\pi}{ck} \equiv T$	Periyot
$\dfrac{1}{\lambda} \equiv \bar{k}$	Dalga sayısı	$\bar{k} = c/\nu$	$\dfrac{1}{T} \equiv \nu$	Frekans
$2\pi\bar{k} \equiv k$	Dalga vektörü	$k = \dfrac{1}{c}\omega$	$2\pi\nu \equiv \omega$	Açısal Frekans

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{(\varepsilon_o\mu_o)^{1/2}}$$

$$E(z,t) = E_{ox}\sin\left[kz-\omega t+\phi\right]$$

$$c = \lambda\nu = \frac{\omega}{k}$$

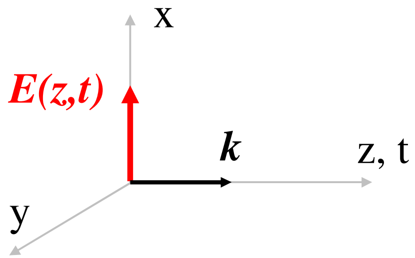
Manyetik Alan-1

H manyetik alan için neler söylenebilir? ***E*** *alanı ile ilişkisi nasıldır?*

Elektrik ve manyetik alan arasındaki ilişkiyi gösteren 3. Maxwell denkleminden elektrik alan biliniyorsa manyetik alan bulunabilir.

$$\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{E}} = -\mu_o \frac{\partial \vec{\boldsymbol{H}}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{H}} = -\frac{1}{\mu_o}\int \left(\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{E}}\right)\partial t$$

Basitlik açısından, +z yönünde ilerleyen ve alan bileşeni x-doğrultusunda olan dalgayı düşünelim $\vec{\boldsymbol{E}} = \hat{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{E}_{ox}\sin(kz-\omega t+\phi)$



$$\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{E}} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{j}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\boldsymbol{i}}(0-0) - \hat{\boldsymbol{j}}(0-\frac{\partial}{\partial z}E_x) + \hat{\boldsymbol{k}}(0-\frac{\partial}{\partial y}E_x)$$

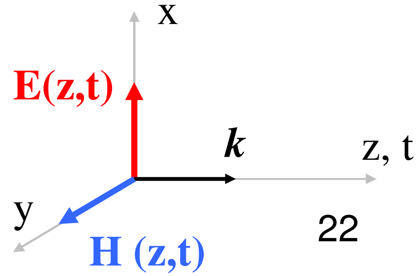
$$\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{E}} = \hat{\boldsymbol{j}}(\frac{\partial E_x}{\partial z}) = \hat{\boldsymbol{j}}\left[kE_{ox}\cos(kz-\omega t+\phi)\right]$$

$$\vec{\boldsymbol{H}} = -\frac{1}{\mu_o}\int\left[kE_o\cos(kz-\omega t+\phi)\,\hat{j}\right]dt = \frac{k}{\omega}(\frac{E_o}{\mu_o})\sin(kz-\omega t+\phi)\,\hat{j}$$

$c = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{1}{(\varepsilon_o\mu_o)^{1/2}}$ olduğu hatırlanırsa manyetik alan (H)

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{H}} = (\frac{\varepsilon_o}{\mu_o})^{1/2}E_o\sin(kz-\omega t+\phi)\,\hat{j} = H_o\sin(kz-\omega t+\phi)\,\hat{j}}$$

$H_o \equiv (\varepsilon_o/\mu_o)^{1/2}E_o$ Manyetik alan +y-yönündedir.



Manyetik Alan-2

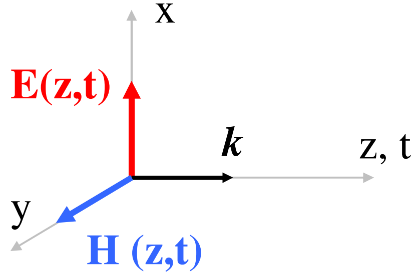
$\vec{E} = E_o \sin(kz - \omega t + \phi)\hat{i}$ Elektrik alan

$\vec{H} = H_o \sin(kz - \omega t + \phi)\hat{j}$ Manyetik alan

Maxwell denklemlerinin çözümleri olan Elektrik ve Manyetik alanları karşılaştıralım:

Faz $\phi_{E_o} = \phi_{H_o}$ ⟹ ***Elektrik ve manyetik alanın fazları aynı*** (Elektrik alanın maksimum (minimum) olduğu yerde manyetik alanda (maksimum (minimum) olacaktır)

Genlik $\vec{H}_o = (\frac{\varepsilon_o}{\mu_o})^{1/2}\vec{E}_o$ ⟹ ***Yön*** (Elektrik alan (***E***) +x doğrultusunda ise Manyetik alan (***H***) +y doğrultusundadır) (Elektrik alanın herhangi bir doğrultuda olduğu durumda da manyetik alan her zaman elektrik alana dik olur)



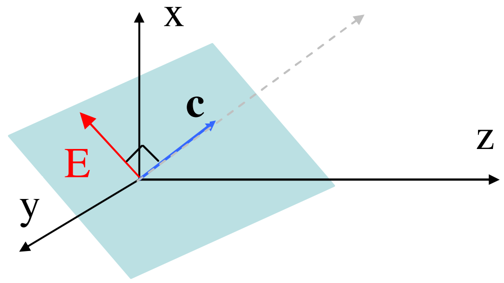
Alan genliklerinin büyüklükleri $|\vec{H}_o| = (\frac{\varepsilon_o}{\mu_o})^{1/2}|\vec{E}_o|$

Alan genliklerinin oranı ***boş uzayın empedansı*** olarak tanımlanır $\frac{|\vec{E}_o|}{|\vec{H}_o|} = (\frac{\mu_o}{\varepsilon_o})^{1/2} \equiv \eta_o$

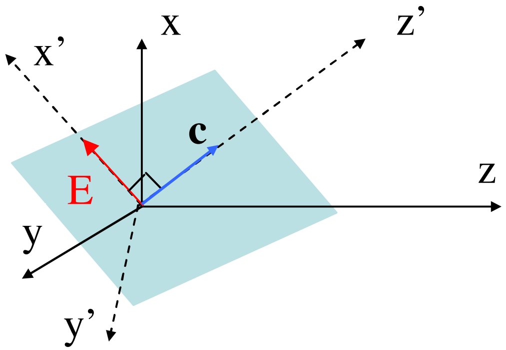
Boş uzayın empedans değeri $\eta_o = (\frac{\mu_o}{\varepsilon_o})^{1/2} \cong 120\pi \cong 377\Omega$

Elektromanyetik Dalga-En Genel Durum

Şimdiye kadar, çözümün anlaşılır olabilmesi için özel durumlara baktık. Örneğin dalganın +z yönünde ilerlediğini, elektrik alanın +x doğrultusunda olduğu gibi. Yayılma doğrultusu özel bir doğrultu (z) değil de herhangi bir doğrultu (r) olursa benzer çözümler yine geçerlidir. Örneğin herhangi bir doğrultuda (r) ilerleyen dalgaya uygun koordinat sistemi (x'y'z') çakıştırılarak benzer sonuçlar bulunabilir.



Yayılma doğrultusu r



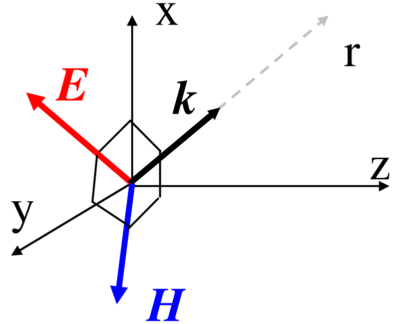
Yayılma doğrultusu z'

Bulunan sonuçlar genelleştirilirse: herhangi bir (r) doğrultusunda ilerleyen ışığın elektrik ve manyetik alanları vektörel olarak

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_o \sin(\vec{k}.\vec{r} - \omega t + \phi)$$

$$\vec{H}(r,t) = \vec{H}_o \sin(\vec{k}.\vec{r} - \omega t + \phi)$$

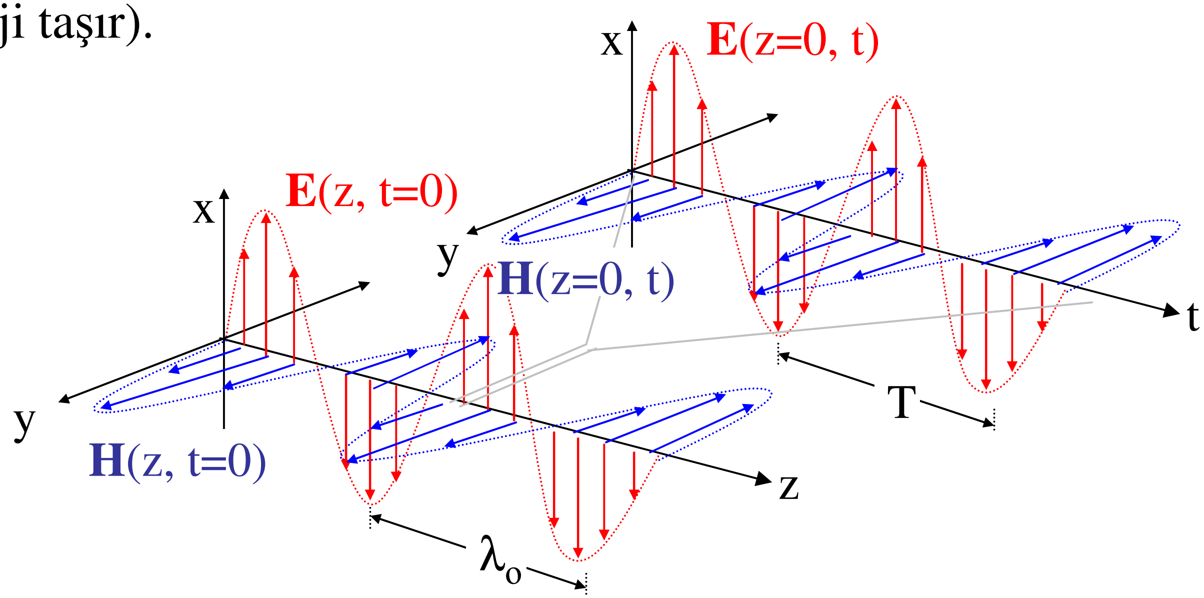
yazılabilir. Elektrik alan (***E***) ve manyetik alan (***H***) her zaman birbirine ve aynı zamanda da dalga vektörüne (***k***) diktirler.



$$\vec{E}_o \times \vec{H}_o // \vec{k}$$

Elektromanyetik Dalganın Özellikleri-Özet

- Işık, elektrik (***E***) ve manyetik (***H***) alanlardan oluşan enine bir elektromanyetik dalgadır (TEM-TransverseElectricMagnetic).
- Elektrik ve manyetik alan bileşenleri her zaman birbirlerine diktir.
- Alanlar, aynı zamanda dalganın ilerleyiş yönünde olan ***k*** dalga vektörüne diktir.
- Alan bileşenleri hem zaman içinde hem de konuma bağlı olarak periyodik bir değişim gösterir; zaman içersindeki salınım ω, uzaysal konumdaki salınım ise ***k*** ile temsil edilir.
- Elektrik alan ile manyetik alan arasında faz farkı yoktur, alanların oranı boş uzayın empedansına eşittir.
- Işığı oluşturan alan bileşenleri (***E*** ve ***H***) birbirinin kaynağıdır; birinin değişimi diğerini oluşturur ve tekrarlanan değişim sonucu dalga uzayda v hızı ile hareket eder (enerji taşır).

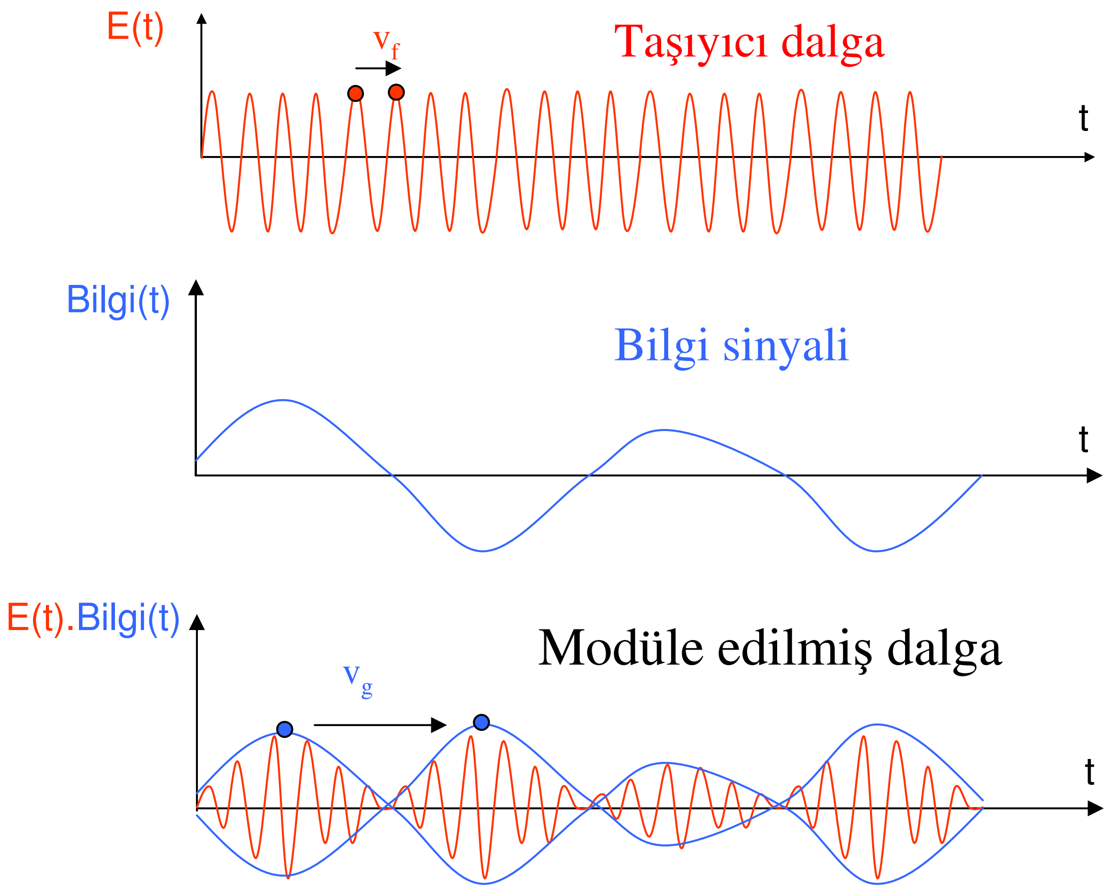


Grup ve Faz Hızı

Dalgalar söz konusu olunca iki farklı hızdan bahsedilir: Faz ve Grup Hızı

Faz hızı, tek frekanslı bir dalganın (eş faz yüzeylerinin) hızını, grup hızı ise dalga paketinin (frekansları farklı birden çok dalganın oluşturduğu atma) hızını ifade eder.

Bilgi iletimi, tek frekanslı taşıyıcı bir dalganın modüle edilmesi ile gönderildiğinden bilgi, faz hızında değil grup hızında iletilir ve genellikle faz hızına eşit veya faz hızından küçüktür.



Dalga hızı (faz hızı)-taşıyıcı dalga

$$\boxed{v_f = \frac{\omega}{k}}$$ Faz hızı

Modüle edilmediği için bilgi iletmez!

Bilgi sinyali

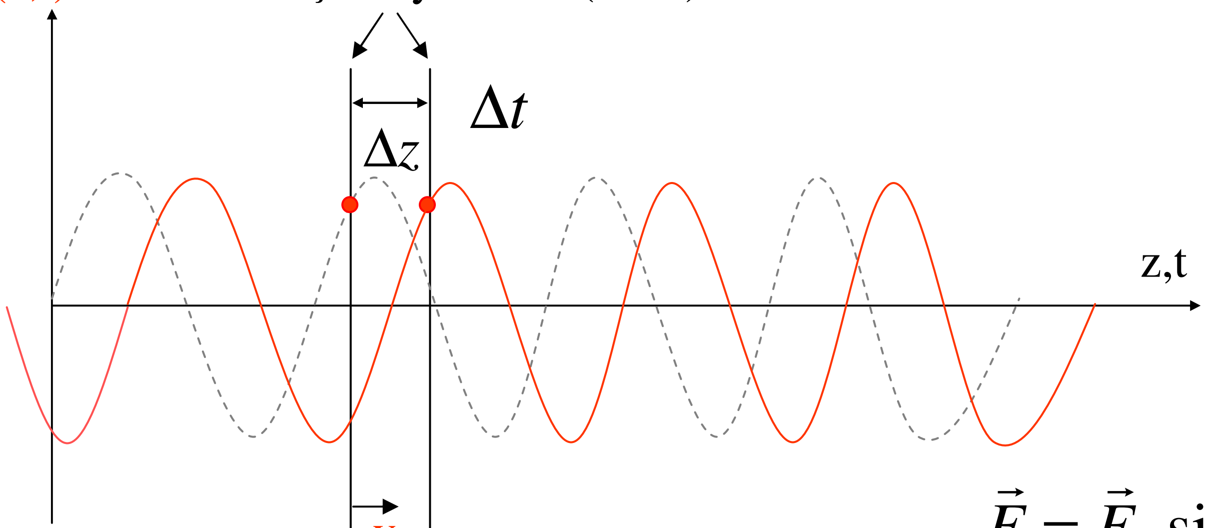
Bilgi iletim hızı (grup hızı)-modüle edilmiş dalga

$$\boxed{v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}}$$ Grup hızı

Bilgi grup hızı ile iletilir

Faz Hızı

Faz hızı, tek frekanslı bir dalganın (eş faz yüzeylerinin) hızını gösterir.



$$\vec{E} = \vec{E}_o \sin(kz - \omega t)$$

$$(kz_1 - \omega t_1) = \phi \rightarrow E(z_1, t_1) = sbt = A$$

$$(kz_2 - \omega t_2) = \phi \rightarrow E(z_2, t_2) = sbt = A$$

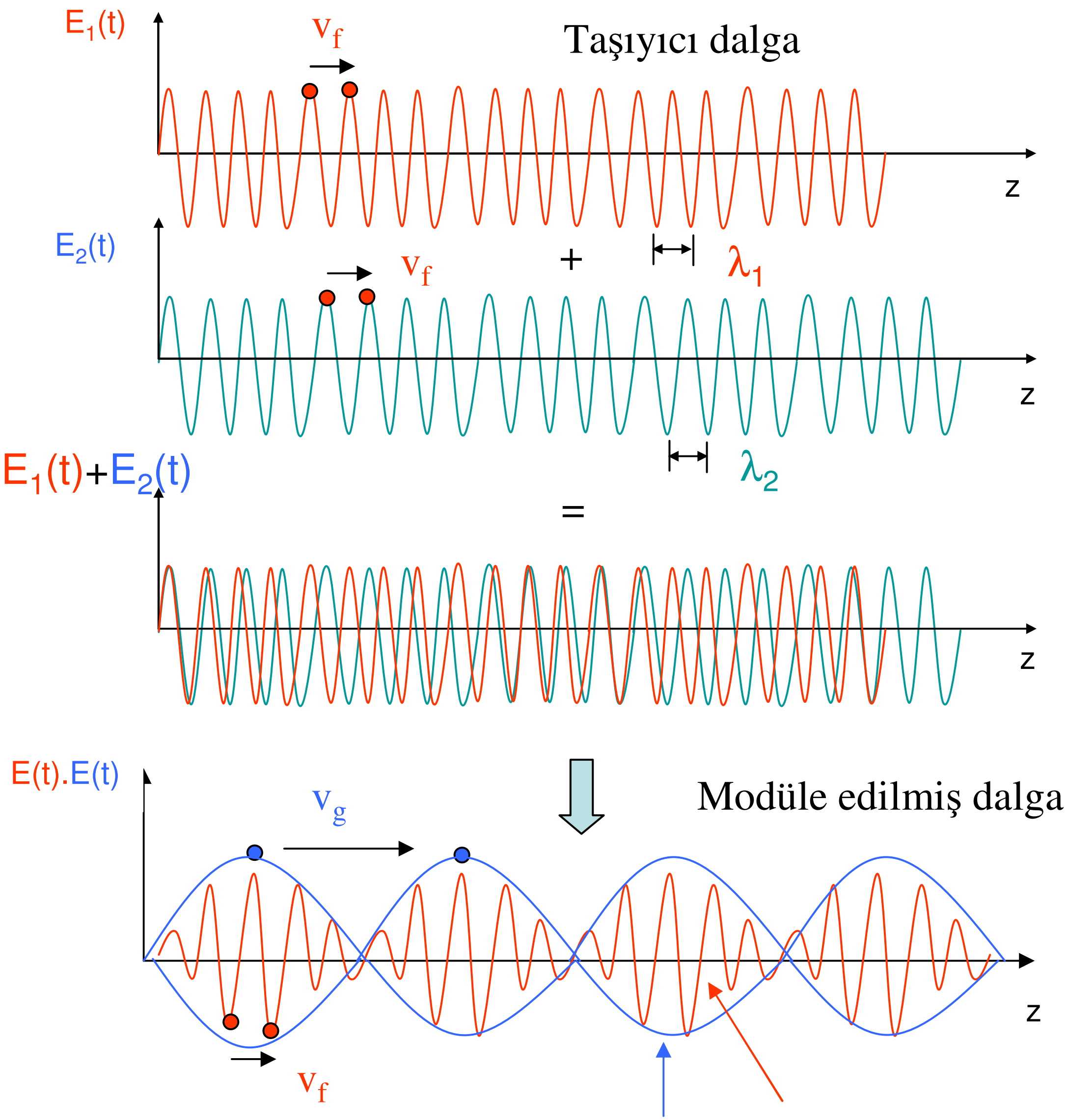
$$k(z_2 - z_1) - \omega(t_2 - t_1) = \phi - \phi = 0$$

$$k\Delta z - \omega \Delta t = 0 \Rightarrow v \equiv \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}$$

$$\boxed{v_f = \frac{\omega}{k}}$$ Faz Hızı

Grup Hızı

Frekansları birbirine yakın iki dalga, modüle edilmiş bir dalgayı ifade edilebilir.



$E(z,t)=E_{oz}(z,t)E_o\sin[k_f z-\omega_f t)+\phi]$

$E_1(z,t)=E_o\cos[k_1 z-\omega_1 t)]$

$$v_f=\frac{\omega}{k}=\upsilon\lambda$$ Faz Hızı

$E_2(z,t)=E_o\cos[k_2 z-\omega_2 t)]$

$k_m=(1/2)(k_1-k_2)$ $\quad k_f=(1/2)(k_1+k_2)$

$\omega_m=(1/2)(\omega_1-\omega_2)$ $\quad \omega_f=(1/2)(\omega_1+\omega_2)$

$E(z,t)=2E_o\cos(k_m z-\omega_m t)\sin[k_f z-\omega_f t)+\phi]$

$E(z,t)=E_{oz}(z,t)E_o\sin[k_f r-\omega_f t)+\phi]$

Görüldüğü gibi dalganın genliği düzlem dalgada olduğu gibi sabit değil uzay ve zamanın fonksiyonudur. Genlik, grup hızı ile hareket etmektedir.

$$v_g=\frac{\partial\omega}{\partial k}$$ Grup Hızı

Işık Dalgasının Farklı Gösterimleri

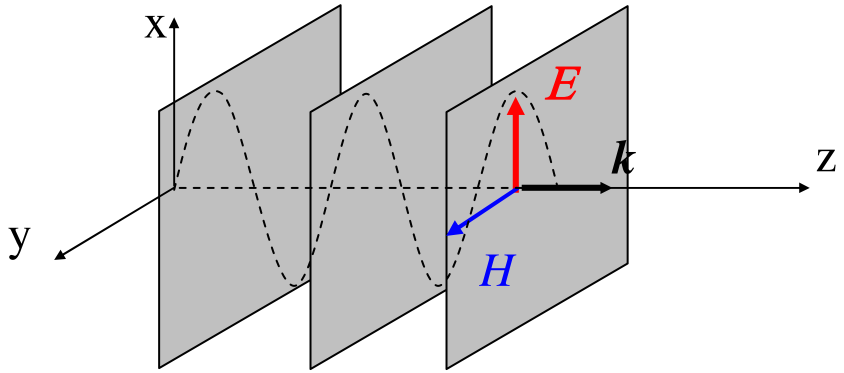
Elektrik ve manyetik alanlar için elde edilen düzlemsel dalga çözümlerini daha şık bir şekilde karmaşık gösterim kullanarak vektörel şekilde yazabiliriz. Karmaşık gösterim dalgalarla işlem yapmayı kolaylaştırır.

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$$

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{i(\vec{\mathbf{k}}.\vec{\mathbf{r}} - \omega t + \phi)} \quad \text{Elektrik alan}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_o e^{i(\vec{\mathbf{k}}.\vec{\mathbf{r}} - \omega t + \phi)} \quad \text{Manyetik alan}$$

Burada *k*, dalga vektörü, *i* ise karmaşık sayıdır. Alan genlikleri E_o ve H_o en genel olarak karmaşık vektördür ve ışığın kutupluluk özelliğinin incelendiği Bölüm 5'de ayrıntılı olarak ele alınacaktır.



Düzlemsel dalga

Işık ile İletilen Enerji-Poynting vektör

Elektromanyetik dalganın en önemli özelliklerinden biri de enerji taşıyabilmesidir.

Elektrik ve Manyetik alanda depo edilen Enerji Yoğunluğu (birim hacim başına enerji)

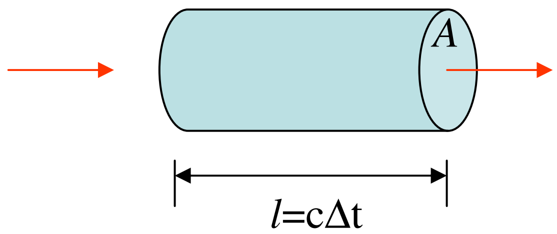
$$u_{EM} = \frac{1}{2}\varepsilon_o\left|\vec{E}\right|^2 + \frac{1}{2}\mu_o\left|\vec{H}\right|^2$$

Elektromanyetik alan durumunda ***E*** ve ***H*** ilişkili olduğu için

$$\left|\vec{E}\right| = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}}\left|\vec{H}\right| \Rightarrow \left|\vec{H}\right| = \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}\left|\vec{E}\right|$$

$$u_{EM} = \varepsilon_o\left|\vec{E}\right|^2 = \mu_o\left|\vec{H}\right|^2$$

Elektromanyetik enerji iletimini ifade edebilmek için birim yüzeyden birim zamanda iletilen enerjiyi simgeleyen ***S*** niceliği kullanılır   Enerji akısı=|***S***|=enerji/(alan-zaman)



SI birim sisteminde birimi W/m^2 dir.

$$\left|\vec{S}\right| = \frac{u_{EM}(\Delta t c)A}{A\Delta t} = u_{EM}c = \varepsilon_o\left|\vec{E}\right|^2\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}\left|\vec{E}\right|^2$$

$$\eta_o = \left(\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}\right)^{1/2} \cong 120\pi \cong 377\Omega \qquad \left|\vec{S}\right| = \frac{\left|\vec{E}\right|^2}{\eta_o}$$

Elektromanyetik Alanda Depo Edilen Enerji-2

$$\vec{\boldsymbol{S}} = \vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{H}} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{S}} = \left|\vec{\boldsymbol{E}}_o \times \vec{\boldsymbol{H}}_o\right| \hat{k}$$

$$\left|\vec{\boldsymbol{S}}\right| = \frac{\left|\vec{\boldsymbol{E}}\right|^2}{\eta_o} = \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}} \left|\vec{\boldsymbol{E}}\right|^2 = c\varepsilon_o \left|\vec{\boldsymbol{E}}\right|^2$$

S vektörüne ***Poynting vektör*** denir ve ışığın (EM dalganın) birim zamanda birim yüzeyden ilettiği enerji akısının ölçüsüdür.

Enerji aktarım yönü (***S***), dalganın yayılma (***k***) yönündedir.

Düzlem dalgalar için enerji akısı (Poynting vektör) |***S***| [enerji/(alan-zaman)]

$$\vec{E} = \vec{E}_o \sin(\vec{k}.\vec{r} - \omega t + \phi) \Longrightarrow \left|\vec{S}\right| = c\varepsilon_o \left|\vec{E}_o\right|^2 \sin^2(\vec{k}.\vec{r} - \omega t + \phi)$$

Işık algılayıcılar (dedektörler), ışığın frekansı çok yüksek olduğu için ($\omega \approx 10^{15}$ Hz) bu hıza ayak uyduramazlar. Gerçekte dedektörlerin algıladığı, ışığın zaman ortalamasıdır.

Enerji akısının zaman ortalaması $\left\langle \vec{\boldsymbol{S}} \right\rangle = \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{E}}_o \times \vec{\boldsymbol{H}}_o) = I\hat{k}$ $\qquad$ $\langle \sin^2(kr-\omega t+\phi)\rangle = 1/2$

$$\left\langle \left|\vec{S}\right| \right\rangle = \frac{1}{2}\left|\vec{E}_o\right|.\left|\vec{H}_o\right| = \frac{\left|\vec{E}_o\right|^2}{2\eta_o} = \frac{\left|\vec{E}_o\right|^2}{2\mu_o c} \equiv I$$

eski ismi Şiddet (Intensity)
yeni ismi Parlaklık (Irradiance)

$$\left\langle \left|\vec{S}\right| \right\rangle = I = \varepsilon_o c \left\langle \left|\vec{E}\right|^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_o c \left\langle \left|\vec{E}_o\right|^2 \right\rangle$$

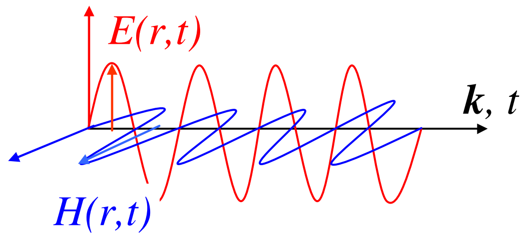
Elektrik alan ***E***, madde içindeki yüklere daha etkin şekilde kuvvet uygulayarak iş yapabildiği için ışığı oluşturan ***E*** alanına optik alan denir.

Işığın Kesikli (Kuantum) Doğası-1

Şimdiye kadar elektromanyetik dalgayı, yani ışığı, klasik olarak inceledik.

Klasik bakış açısından ışık:

Elektrik/Manyetik alan	$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$
Dalga vektörü	k
Açısal frekans	ω
Enerji	$\lvert\vec{\boldsymbol{S}}\rvert \propto \lvert\vec{\boldsymbol{E}}\rvert^2$
Parlaklık	$I = \langle\lvert\vec{S}\rvert\rangle$



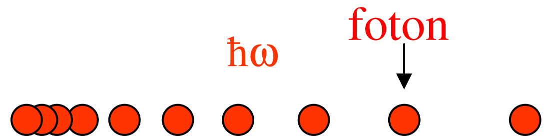
klasik bakış

Klasik yaklaşımda ışık enerji alanın karesi ile orantılıdır

Elektromanyetik alan kesiklidir (kuantalıdır) ve alan kesikliliğine (kuantasına) "foton" denir.

Kuantum bakış açısından ışık:

Durgun kütlesi	m=0
Momentum	**p=ħk**
Enerji=(Foton sayısı)x(foton enerjisi)	E= Nħω
Parlaklık (parçacık akısı)	I=foton sayısı/(m^2-s)



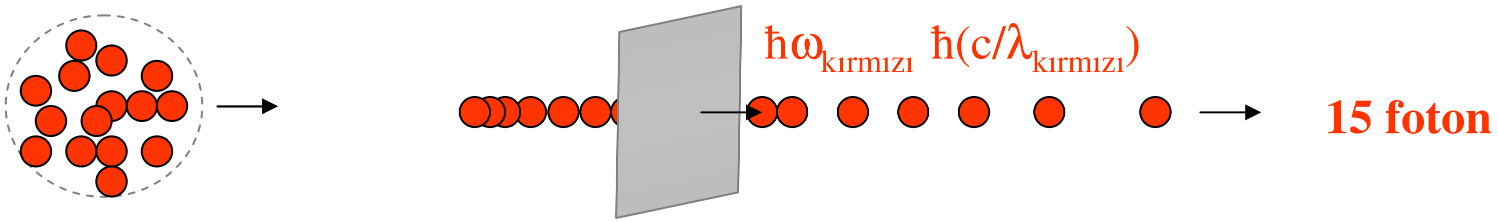
keskikli bakış

Kesikli (Kuantum) yaklaşımda ışığın enerjisi frekans ile orantılıdır.

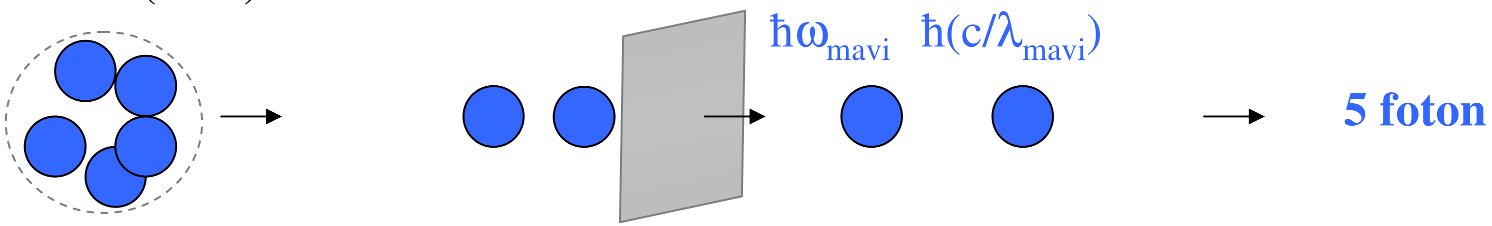
Işığın Kesikli Doğası-2

Verilen bir enerji farklı frekanslarda ışık kuantaları ile iletilebilir. Enerjiyi taşıyan ışık kuantası frekansa bağlıdır. Dolayısı ile aynı enerjiyi iletmek için daha fazla düşük enerjili (büyük dalgaboylu) fotonlara ihtiyaç duyulur. Bu durum, dedektörlerin verimini anlama konusunda önemlidir ve dedektörlerin inceleneceği bölümde yeniden ele alınacaktır.

$I = Watt/m^2 = J/(m^2\text{-}s) = a = sabit$



$I = Watt/m^2 = J/(m^2\text{-}s) = a = sabit$



$I = \text{foton sayısı}/(m^2\text{-}s) = \text{parçacık akısı}$

$\text{Enerji} = (\text{Foton sayısı}) \times (\text{foton enerjisi}) = N\hbar\omega$

Özet

- Işık, elektrik (***E***) ve manyetik (***H***) alanın özel olarak salınımından oluşan elektromanyetik bir dalgadır.
- Bu alanlar her zaman, hem birbirlerine, hem de yayılma doğrultusuna diktir.
- Işığın boşluktaki hızını, boşluğun ε_o ve μ_o değerleri belirler. Boşluk için bu değer:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{(4\pi x 10^{-7}).(8{,}85 x 10^{-13})}} = 2{,}99 x 10^{8}\, m/s$$

- Işığı oluşturan elektrik (***E***) ve manyetik alanın (***H***) genliklerinin büyüklükleri oranı boşluğun empedansını verir.

$$\frac{\left|\vec{E}_o\right|}{\left|\vec{H}_o\right|} = \left(\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}\right)^{1/2} \equiv \eta_o \cong 120\pi \cong 377\Omega$$

- Faz hızı taşıyıcı dalganın, grup hızı ise modüle edilmiş dalganın (bilgi) hızıdır.
- Işık kesiklidir (kuantalıdır) ve kuanta birimine foton denir.
- Işık, Poynting vektör ile verilen yön ve doğrultuda enerji taşır.
- Optik dedektörler, Poynting vektörün zaman ortalaması (<|***S***|>) olan enerji akısını (birim yüzey alanı başına düşen güç) ölçer.

UADMK - Açık Lisans Bilgisi