

Bölüm 3: Madde Ortamında Işık Alıştırmalar

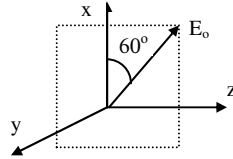
3.1 Elektriksel geçirgenliğin konuma bağlı olduğu durumlarda $\epsilon(r)$, ışığın elektrik alanının boyuna bileşeninin de bulunduğunu, 1. Maxwell denklemini kullanarak gösteriniz (Dielektrik sabitin konuma bağlılığı, ortamın anizotropik oluşu gibi (kristali oluşturan atomların farklı yönlerde farklı dizilim) iki ortamı ayıran arayüzeyde de uzaysal bağlılık düşünülebilir)

Çözüm:

$$\vec{V} \cdot \vec{D} = 0 \quad \vec{V} \cdot (\epsilon(r) \vec{E}) = 0 \quad (\vec{V} \cdot \epsilon(r)) \cdot \vec{E} + \epsilon(r) (\vec{V} \cdot \vec{E}) = 0$$

$$\vec{V} \cdot \vec{E} = -\frac{(\vec{V} \cdot \epsilon(r))}{\epsilon(r)} \cdot \vec{E} = -\vec{E} \cdot \ln(\epsilon(r)) \neq 0$$

3.2 Kırılma indisi $n=2$ olan izotropik bir ortamda $\nu=2 \times 10^{14}$ Hz'lik frekansa sahip elektromanyetik dalganın elektrik ($|E_0|=5$ V/m) alan bileşeni aşağıdaki gibi xz düzleminde. Bu elektromanyetik dalganın elektrik alan bileşeni için vektörel bir ifade türetiniz (ışığın boşluktaki hızını $c=3 \times 10^8$ m/s olarak alabilirsiniz).



Çözüm:

Elektrik ve manyetik alan xz düzleminde olduğu için dalganın yayılma doğrultusu bu düzleme dik olan doğrultu, yani y-doğrultusu boyunca olacaktır. Dolayısı ile yukardaki elektromanyetik dalganın elektrik alan bileşenini vektörel olarak

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t \pm ky)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ifadede açısal frekans (ω) ve dalga vektörü (k)'nın değerlerini bulmalıyız.

Açısal frekans (ω)

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi(2 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}) = 4\pi \times 10^{14} \text{ Hz}$$

Dalgaboyu ve dalga vektörü

$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{2\pi\nu}{v\lambda_n} = \frac{\omega}{v_n} \Rightarrow \nu\lambda_n = v_n = \frac{c}{n} \Rightarrow \lambda_n = \frac{c}{n\nu} \Rightarrow k_n = \frac{\omega}{c}n$$

$$k_n = \frac{4\pi \times 10^{14} \text{ Hz}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} (2) = 4\pi \left(\frac{2}{3}\right) \times 10^6 \text{ m}^{-1}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos 4\pi(10^{14} t \pm \left(\frac{2}{3}\right) \times 10^6 y)$$

$$\vec{E} = E_x \hat{i} + E_z \hat{k}$$

$$\vec{E} = \left[E_{ox} \cos 4\pi(10^{14} t \pm (\frac{2}{3})x10^6 y) \right] \hat{i} + \left[E_{oz} \cos 4\pi(10^{14} t \pm (\frac{2}{3})x10^6 y) \right] \hat{k}$$

$$\vec{E} = \left[E_{ox} \cos 4\pi(10^{14} t \pm (\frac{2}{3})x10^6 y) \right] \hat{i} + \left[E_{oz} \cos 4\pi(10^{14} t \pm (\frac{2}{3})x10^6 y) \right] \hat{k}$$

$$E_{ox} = E_o \cos(\theta) = (5V / m) \cos(60^\circ) = 2.5V / m$$

$$E_{oy} = E_o \sin(\theta) = (5V / m) \sin(60^\circ) = 4.3V / m$$

$$\vec{E} = E_x \hat{i} + E_z \hat{k} = \left[(2.5V / m) \cos 4\pi(10^{14} t \pm (\frac{2}{3})x10^6 y) \right] \hat{i} + \left[(4.3V / m) \cos 4\pi(10^{14} t \pm (\frac{2}{3})x10^6 y) \right] \hat{k}$$

3.3 İletken ortamda elektrik alanın

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_o \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_o \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Dalga denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm:

Elektrik ve manyetik alan xz düzleminde olduğu için dalganın yayılma doğrultusu bu düzleme dik olan doğrultu, yani y-doğrultusu boyunca olacaktır. Dolayısı ile yukardaki elektromanyetik dalganın elektrik alan bileşenini vektörel olarak

4. Maxwell denkleminin $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_o \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ dönüşü alınırsa

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu_o \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{H})$$

elde edilir. Bu ifadedeki elektrik alanın dönüşü yerine 3. Maxwell denklemi

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} \text{ kullanılırsa}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\epsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_o \sigma \vec{E}$$

sadece manyetik alanı içeren ifade elde edilir. Yukarıdaki ifadenin sol tarafı vektörel eşitlik $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$ kullanılarak yeniden yazılırsa

$$-\nabla^2 \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -\epsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_o \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Maxwell'in 2. eşitliğinden $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ olduğundan

Dalga denklemini sağlayan manyetik alan

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_o \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_o \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

elde edilir. Dalganın hızı $v^2 = 1/\epsilon\mu_o$ dir.

3.4 Karmaşık kırılma indisinin gerçekte ve sanal kısımlarını dielektrik sabiti κ cinsinden türetiniz.

Çözüm:

$$\hat{n} = n_o + iK = \sqrt{\hat{\kappa}}$$

$$n_o^2 - K^2 + i2n_oK = \hat{\kappa} = \kappa_G + i\kappa_S$$

$$n_o^2 - K^2 = \kappa_G$$

$$2n_oK = \kappa_S$$

Yaklaşıklık $K \ll n_o$

$$n_o^2 - K^2 = \kappa_G \Rightarrow n_o^2 \cong \kappa_G \Rightarrow n_o \cong \sqrt{\kappa_G}$$

$$n_o \cong \sqrt{\kappa_G}$$

$$K = \frac{\kappa_S}{2n_o} \cong \frac{\kappa_S}{2\sqrt{\kappa_G}}$$

n_o 'ı bulalım:

$$n_o^2 - K^2 = \kappa_G \Rightarrow n_o^2 - \frac{K_S^2}{4n_o^2} = \kappa_G \Rightarrow n_o^4 - \frac{K_S^2}{4} - n_o^2\kappa_G = 0$$

$$n_o^4 - \kappa_G n_o^2 - \frac{K_S^2}{4} = 0$$

$$\text{Kökler } (n_o^2)_{\pm} = \frac{1}{2} \left[K_R \pm \sqrt{K_R^2 + K_I^2} \right]$$

n_o gerçekte bir sayı olması gerektiğinden (kırılma indisinin gerçekte kısmı olduğundan) (-) işaretli ikinci çözüm fiziksel değildir.

$$n_o = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[K_R + \sqrt{K_R^2 + K_I^2} \right]^{1/2}$$

Şimdi de K 'yı bulalım.

$$K = \frac{\kappa_S}{2n_o} = \frac{\kappa_S \left(\frac{K_R + \sqrt{K_R^2 + K_I^2}}{2} \right)^{1/2}}{2 \left(\frac{K_R + \sqrt{K_R^2 + K_I^2}}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{K_R + \sqrt{K_R^2 + K_I^2}}{2} \right)^{1/2}}$$

$$K = \frac{\kappa_s}{2n_o} = \frac{\kappa_s \left(\frac{K_R + \sqrt{K_R^2 + K_I^2}}{2} \right)^{1/2}}{2 \left(\frac{K_R + \sqrt{K_R^2 + K_I^2}}{2} \right)} = \frac{\kappa_s \frac{1}{\sqrt{2}} \left(K_R + \sqrt{K_R^2 + K_I^2} \right)^{1/2}}{\left(K_R + \sqrt{K_R^2 + K_I^2} \right)}$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-K_R + \sqrt{K_R^2 + K_I^2} \right)^{1/2}$$

3.5 Kırılma indisi n olan bir ortamda ışığın d kadarlık bir geometrik yol alması ile oluşacak faz farkının boşlukda l geometrik mesafesini alması ile oluşacak olan faz farkına eşit olacağını gösteriniz.

Çözüm:

$$kd = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) d = \left(\frac{2\pi}{\lambda_o/n} \right) d = \left(\frac{2\pi}{\lambda_o} \right) nd = k_o nd = k_o l$$