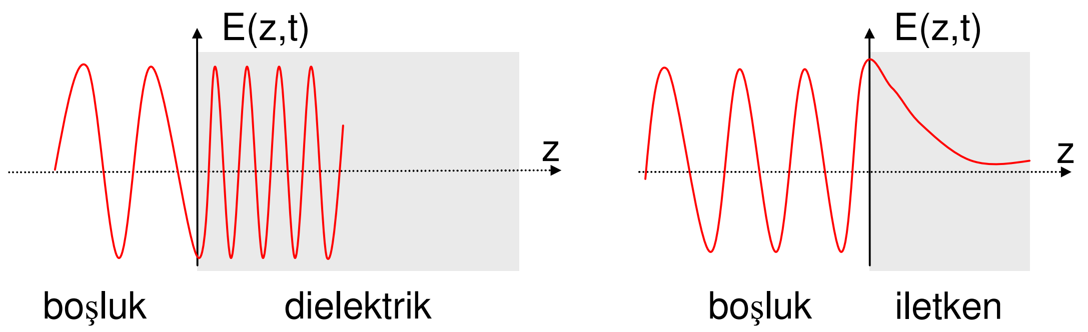
3. Ders

Madde Ortamında Işık



Bu bölümü bitirdiğinizde,

- Işığın madde ortamında (dielektrik ve iletken) davranışı,
- Kutuplanma vektörü,
- Kırılma indisi,
- Karmaşık kırılma indisi,
- Soğurma katsayısı

konularında bilgi sahibi olacaksınız.

Üçüncü Ders: İçerik

- Madde Ortamında Maxwell Denklemleri
- Dielektrik Ortamda Maxwell Denklemleri
- Dipol Momenti
- Kutuplanma Vektörü
- Kırılma İndisi Tanımı
- Metal Ortamda Maxwell Denklemleri
- Optik Sabitler

Madde Ortamında Işık-1

Maxwell denklemleri

(1) $\vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_o}$

(2) $\vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{H}} = 0$

(3) $\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{E}} = -\mu_o \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{H}}}{\partial t}$

(4) $\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{H}} = \varepsilon_o \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t} + \vec{\boldsymbol{J}}$

Boşluk için yukarıdaki denklemleri çözüp, hem ***E*** hem de ***H*** alanının dalga denklemini sağladığını göstermiştik.

Bu derste, Maxwell denklemlerini madde ortamı için yazıp çözmeye çalışacağız.

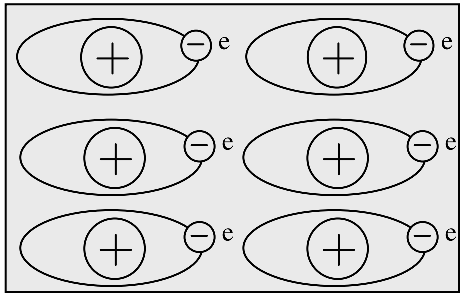
Birbirinden farklı <u>iki tür</u> ortamdan bahsedebiliriz. Bunlar;

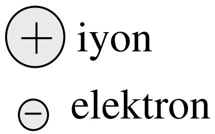
- Dielektrik Ortam
- İletken Ortam

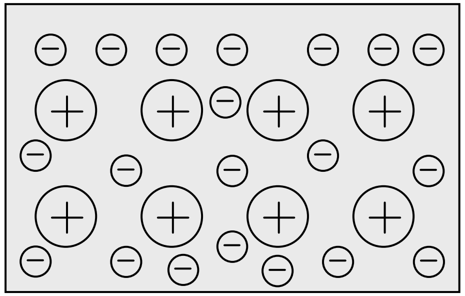
Madde Ortamında Işık-2

Dielektrik Ortam: J=0 (Dielektrik ortam veya yalıtkan ortam veya saydam ortam) $\rho_{serbest}=0$

Metalik Ortam: $J \neq 0$ (İletken ortam veya metalik ortam veya yansıtıcı ortam) $\rho_{serbest}=0$







Dielektrik
$\rho=0$, $J=0$

Metal
$\rho=0$, $J\neq 0$

Net yük yoğunluğu sıfırdır ve serbest dolaşan yükler bulunmaz.

Net yük yoğunluğu sıfırdır ***ancak*** serbest dolaşan yükler (elektronlar) bulunur.

Madde Ortamında Işık-3

Madde ortamı söz konusu olunca neleri bilmek isteriz?

- Maddenin, dış elektrik alana tepkisi nasıldır?
- Bu elektrik alan elektromanyetik dalgayı oluşturan elektrik alan (optik alan) bileşeni olduğunda maddenin tepkisi nasıl olur?
- Malzemenin elektrik alana tepkisini karakterize eden nicelikler ile maddenin optik sabitleri arasındaki ilişki nasıldır?
- Ortamın tepkisinin ışığın frekansına bağlılığı nasıldır?

Madde Ortamında Işık-4

Durum I: $\boldsymbol{J}=0$ (Dielektrik ortam veya yalıtkan ortam veya saydam ortam) $\rho_{serbest}=0$

Dielektrik malzemeleri (SiO_2 gibi) mükemmel yalıtkan olarak düşüneceğiz

	Boşluk		Madde Ortamı		
(1)	$\vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{E}}=0$	$\Rightarrow$	$\vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{E}}=\dfrac{\rho_{ind}}{\varepsilon_o}=\dfrac{-\vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{P}}}{\varepsilon_o}$	$\Rightarrow$	$\vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{D}}=0$
(2)	$\vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{H}}=0$	$\Rightarrow$	$\vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{H}}=0$		$\boxed{\vec{\boldsymbol{D}}\equiv\varepsilon_o(\vec{\boldsymbol{E}}+\vec{\boldsymbol{P}})}$
(3)	$\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{E}}=-\mu_o\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{H}}}{\partial t}$	$\Rightarrow$	$\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{E}}=-\mu_o\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{H}}}{\partial t}$		
(4)	$\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{H}}=\varepsilon_o\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$	$\Rightarrow$	$\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{H}}=\varepsilon_o\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$		

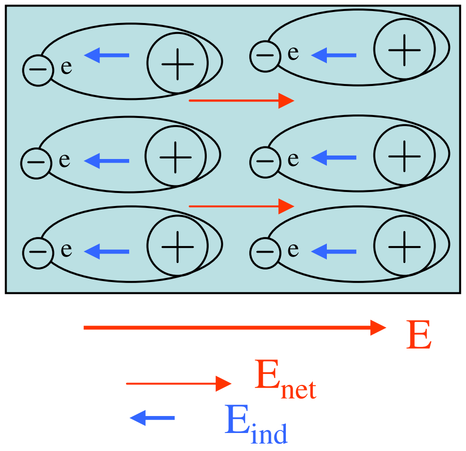
- Madde ortamında Maxwell Denklemleri, boş uzayda yazıldığı forma indirgenerek bilinen çözümler uygun şekilde düzenlenebilir.
- Dış alanlar (ışığın elektrik ve manyetik alanı) ortamdaki yük dağılımını değiştireceğinden bu etkiyi göz önünde bulundurarak Maxwell denklemlerini düzenlememiz gerekecektir.
- Optoelektronik malzemelerin manyetik özellik göstermediklerini kabul ederek sadece elektrik alandan kaynaklanan değişimler göz önünde bulundurulacaktır.
- Dış elektrik alanla ortamın kutuplanmasından (***P***) dolayı oluşan net yükün ($\rho_{ind}=\vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{P}}$) etkisini ***E*** alanı yerine yeni tanımlayacağımız ***D*** vektörü ile ifade edeceğiz.
- Bu amaçla, ilk yapılacak iş ortamın kutuplanabilirliğini tanımlamak ve kutuplanabilirliği dış elektrik alana bağlayacak eşitlik türetmek olacaktır.

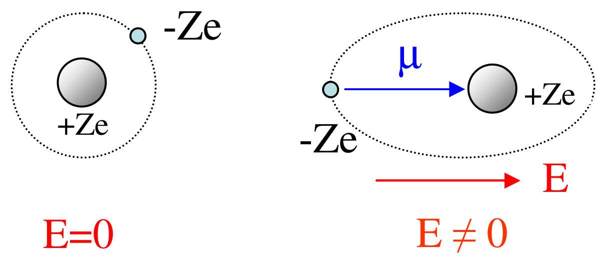
Dipol Momentleri

Dış elektrik alanın ortamın elektrik özelliklerini nasıl değiştireceğini ortamdaki elektrik dipollerini tanımlayarak anlatabiliriz.

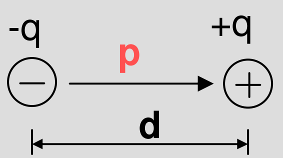
Uygulanan dış alan madde içinde:

- İndüksiyon yolu ile elektrik dipoller oluşturur (atomun yük yoğunluğunun değişmesinden kaynaklanan dipoller),
- Var olan dipolleri (dış alan olmadan da var olan dipollerin, örneğin su molekülünde olduğu gibi) alan ile aynı doğrultuya getirmeye çalışır.





dipol moment tanımı



Aralarındaki mesafe ***d*** olan iki zıt yükün dipol momenti (p)

$p = qd$

μ_{atom}=Bir atomun dipol momenti

$\mu_{atom} = (Ze)d$

Dış elektrik alan atomun yük yoğuluğunu değiştirerek dipol momenti oluşmasını sağlar.

Kutuplanma Vektörü-1

Ortamın dış elektrik alana tepkisi ortamın kutuplanabilirliği ile ölçülür ve bu tepki Kutuplanma Vektörü (Polarization Vector) ile ifade edilir.

Kutuplanma Vektörü (*P*) $\vec{P} = \frac{\sum \vec{\mu}_{atom}}{V}$ şeklinde tanımlanır.

μ_{atom}=Bir atomun dipol momenti

V=Hacim

Kutuplanma Vektörü, vektörel bir nicelik olduğundan büyüklüğü ve yönü vardır:

$$P = \begin{cases} \text{Büyüklüğü } (|P|)\text{: dipol moment/hacim} \\ \text{Yönü: dipol momentin yönündedir.} \end{cases}$$

Yoğunluğu ρ, atomik kütlesi A olan bir maddenin N_A Avagadro sayısı olmak üzere Kutuplanma vektörü (büyüklüğü)

$$\left|\vec{P}\right| = \left(\frac{N_A}{A}\rho\right)\mu_{atom}$$

şeklinde verilebilir.

Ortamın optik özelliklerinin bilinmesi açışından ***P*** ile ***E*** arasındaki ilişkinin bilinmesi gerekir

***P** ile **E** arasında nasıl bir ilişki vardır?*

Kutuplanma Vektörü-2

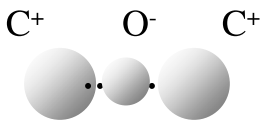
Uygulanan dış elektrik alan (***E***) ile Kutuplanma Vektörü (***P***) arasında nasıl bir ilişki vardır?

Bu ilişki en genel olarak:

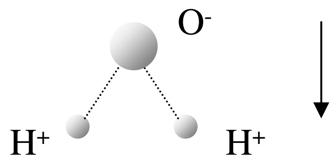
$$\vec{P}(\vec{E}) = \vec{P}_o + \varepsilon_o \chi^{(1)} \vec{E} + \varepsilon_o \chi^{(2)} \vec{E}^2 + \varepsilon_o \chi^{(3)} \vec{E}^3 + \ldots$$

şeklinde ifade edilebilir.

Burada $\boldsymbol{P_o}$, kalıcı kutuplanmadır (Dış elektrik alan olmadan var olan kutuplanma, örneğin H_2O molekülünde olduğu gibi) ve birçok malzeme için sıfırdır. Işığın ortamda ilerleyişi söz konusu olduğundan dış elektrik alan ile oluşan değişim bizim için önemli olduğundan bu terim ile ilgilenmeyeceğiz.



$\mathbf{P_o}=0$



$\mathbf{P_o}\neq 0$

χ ise elektrik duygunluk (electric susceptibility) ve madenin optik özelliklerini incelemede oldukça önemli bir parametredir.

$\chi^{(1)}$= 1. dereceden elektrik duygunluk

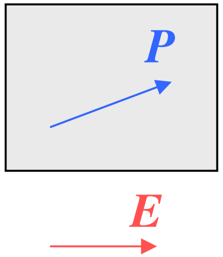
$\chi^{(2)}$= 2. dereceden elektrik duygunluk (doğrusal olmayan optik)

Bu bölümde sadece elektrik alan ile orantılı olan doğrusal terim

$$\vec{P}(\vec{E}) = \varepsilon_o \chi^{(1)} \vec{E}$$

ile ilgilenilecektir. Bölüm 11'de doğrusal olmayan terimler dikkate alınacaktır.

Kutuplanma Vektörü-3



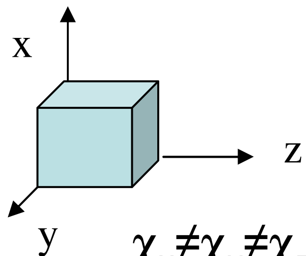
$$\vec{P}(\vec{E}) = \vec{P}_o + \varepsilon_o \chi^{(1)} \vec{E} + \varepsilon_o \chi^{(2)} \vec{E}^2 + \varepsilon_o \chi^{(3)} \vec{E}^3 + \ldots$$

Kristal malzemeler yön özelliği gösterdiklerinden malzemenin elektrik duygunluğu en genel durumda bir tensörle ifade edilir.

Böyle malzemelerde farklı yönlerde uygulanan aynı büyüklükteki elektrik alana malzemenin tepkisi farklı olur ve ***E*** ve ***P*** vektörleri her zaman birbirine paralel olmayabilir (Bölüm 8).

Bu durumda Kutuplanma Vektörü (***P***)

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \varepsilon_o \begin{bmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$



$\chi_x \neq \chi_y \neq \chi_z$

şeklinde ifade edilir. Tensörel ifadeden de görüleceği üzere kutuplanma vektörünün bir bileşeni sadece elektrik alanın o yöndeki bileşeni cinsinden değil, diğer üç bileşenin toplamı cinsinden ifade edilecektir.

Bu derste sadece izotropik malzemeler (yön özelliği olmayan malzemeler) ile ilgilenilecektir, anizotropik malzemeler 8. Bölümde incelenecektir.

Optik Ortamlar

Elektrik duygunluk (χ) ortamın optik özelliğini yansıttığından duygunluk ifadesini göz önünde bulundurarak ortamı optik olarak sınıflandırabiliriz.

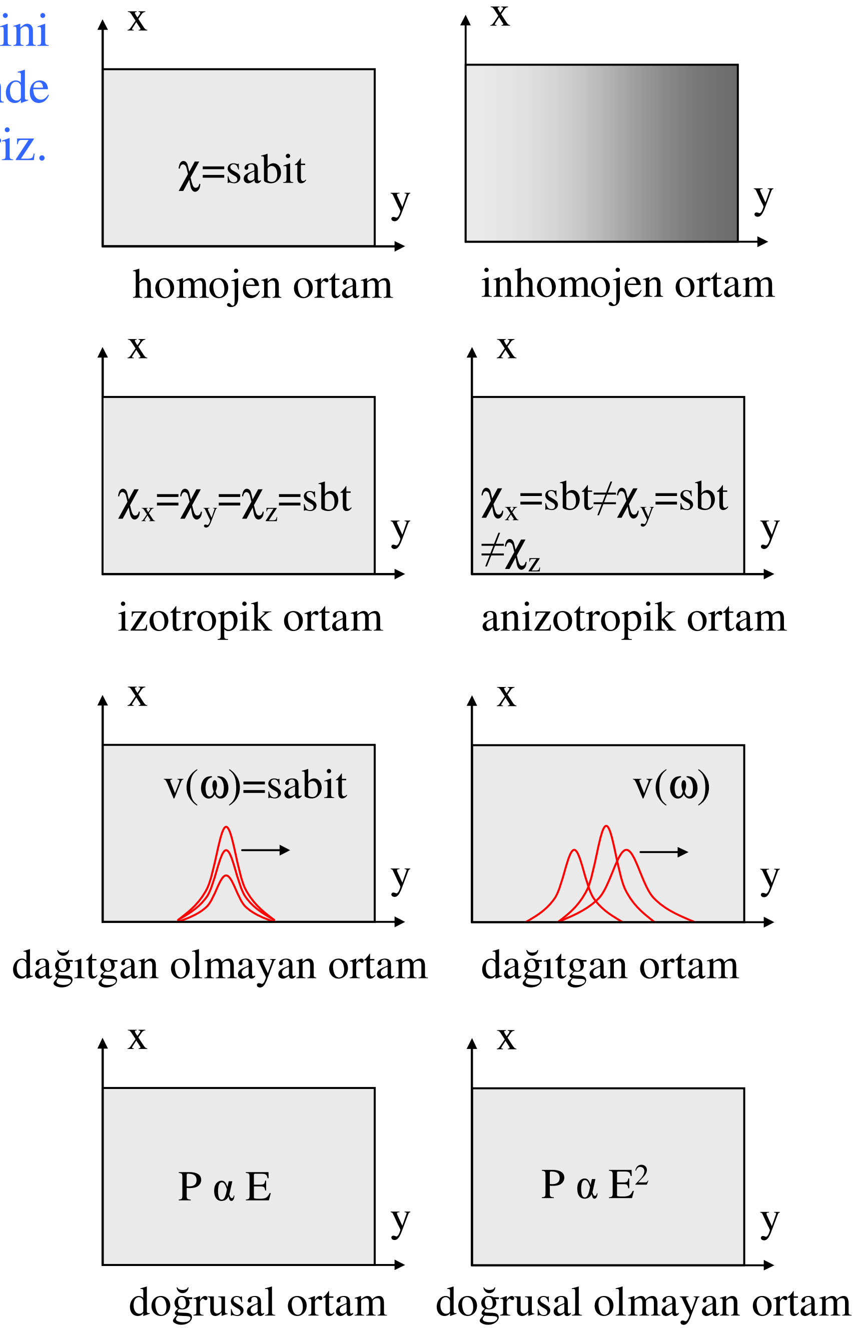
$$\vec{P}(\vec{E}) = \vec{P}_o + \varepsilon_o \chi^{(1)} \vec{E} + \varepsilon_o \chi^{(2)} \vec{E}^2 + \varepsilon_o \chi^{(3)} \vec{E}^3 + \ldots$$

(a) Homojen (Homogenous)

(b) İzotropik (İsotropic)

(c) Dağıtkan (Dispersive)

(d) Doğrusal (Nonlinear)



Elektrik Yerdeğiştirme Vektörü

*Elektrik Yerdeğiştirme Vektörü (**D**)*

Ortamın, dış elektrik alandan dolayı kutuplanmasını içerecek yeni bir vektör,

Elektrik Yerdeğiştirme Vektörü (D) tanımlanabilir.

Ortamın elektriksel özelliklerini içeren bu yeni vektör Maxwell denklemlerinde kullanılırsa ortamın kutuplanma etkisi dalga denklemine yansıtılmış olur.

E ve ***P*** cinsinden yer değiştirme vektörü ***D***

$$\vec{D} = \varepsilon_o(\vec{E} + \vec{P})$$

şeklinde tanımlanır. ***P***'yi elektrik alan cinsinden (1. dereceden katkı alınarak) ifade edersek

$$\vec{P}(\vec{E}) = \varepsilon_o \chi^{(1)} \vec{E}$$

E cinsinden ***D*** yerdeğiştirme vektörü

$$\vec{D} = \varepsilon_o(\vec{E} + \chi^{(1)}\vec{E}) \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = (\varepsilon_o + \varepsilon_o\chi^{(1)})\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$$

$\varepsilon \equiv \varepsilon_o(1 + \chi^{(1)})$ *Ortamın elektrik geçirgenliği*

Dielektrik Ortam-1

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \varepsilon \equiv \varepsilon_o (1 + \chi^{(1)})$$ *Ortamın elektrik geçirgenliği*

D vektörü, madde ortamında toplam (net) elektrik akısıdır.

Elektrik alan için yapılan benzer işlemler manyetik alan için de yapılabilir.

Elektrik Özellikler	Manyetik Özellikler
$E \Rightarrow D$ $(\boldsymbol{D}=\varepsilon_o\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E})$	$H \Rightarrow B$ $(\boldsymbol{B}=\mu_o\boldsymbol{H}+\mu_o\boldsymbol{M} \Rightarrow \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H})$
$\varepsilon_o \Rightarrow \varepsilon$	$\mu_o \Rightarrow \mu$
D=Elektrik yerdeğiştirme	***B***=Manyetik akı

Madde ortamının özelliğini iki sabit, μ ve ε belirler. Bu ders kapsamında ilgileneceğimiz optik malzemeler manyetik özellik göstermedikleri için $\mu \approx \mu_0$ olarak alınabilir; dolayısı ile sadece ε'nin özellikleri ile ilgileneceğiz.

Boşluk

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$(\mu \approx \mu_o)$
$(\varepsilon_o \to \varepsilon)$ ⇒

Madde ortamı

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon \mu_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Ortamı karakterize eden elektrik geçirgenlik *ε*, Maxwell denklemlerinde yerine konularak madde ortamı için dalga denklemi elde edilir.

Dielektrik Ortam-2

$$\nabla^2 \vec{\boldsymbol{E}} = \mu_o \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}$$ Madde Ortamında Dalga Denklemi

$$v_{ortam} \equiv v_m = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \cong \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon}} < c$$

Dalga denkleminin çözümü :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_o \sin(\vec{k}_m.\vec{r} - \omega t + \phi)$$ Elektrik alan

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_o \sin(\vec{k}_m.\vec{r} - \omega t + \phi)$$ Manyetik alan

k_m: madde ortamında dalga vektörü

Madde ortamında ışığın hızı değiştiğinden dalga boyu dolayısı ile dalga vektörü de değişime uğramıştır.

$$\lambda_m.\nu = v_m$$

Kırılma İndisi-1

Işığın madde ortamındaki hızı (v_m) boş uzaydaki hızı (c) ile karşılaştırılabilir. Bu hız, dalganın madde ortamındaki davranışına ilişkin birçok ifadede yer aldığı için önemlidir.

Boş uzaydaki ışık hızı: $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_0}}$

Madde ortamında ışık hızı: $v_m = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon}}$

Kırılma indisi (n) tanımı

$$n \equiv \frac{c}{v_m} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon}}\right)} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_o}}$$

$\boxed{\text{Kırılma indisi, ışığın boşluktaki hızının (c), madde içindeki hızına } (v_m) \text{ oranıdır.}}$

Örneğin, kırılma indisi n=4.0 olan bir ortamda ışık, boşluktaki yayılma hızının ¼ katı hızda ilerleyecektir.

Kullanışlı bir başka tanım ise *dielektrik sabiti*dir.

Dielektrik sabiti (κ) tanımı: $\kappa \equiv \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_o} = n^2$

Gerçekte ε ve κ frekansa bağlıdır ama şimdilik incelemelerimizde bunu göz ardı edeceğiz

Kırılma İndisi-2

Optoelektronik teknolojisinde yaygın olarak kullanılan bazı malzemelerin kırılma indisi değerleri (Kırılma indisi frekansa çok sıkı bağlıdır, bu bağlılık Bölüm 6'da ayrıntılı olarak incelenecektir.)

Madde	Kırılma İndisi $n \equiv \frac{c}{v_m} = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_o}$
Boşluk	1,0000
Hava	1,0003
Su	1,333
Cam	1,5-1,7
Si	3,5
Ge	4,0
GaAs	3,6
AlAs	3,2
InP	3,5
InAs	3,8
InSb	4,2

Kırılma İndisi-3

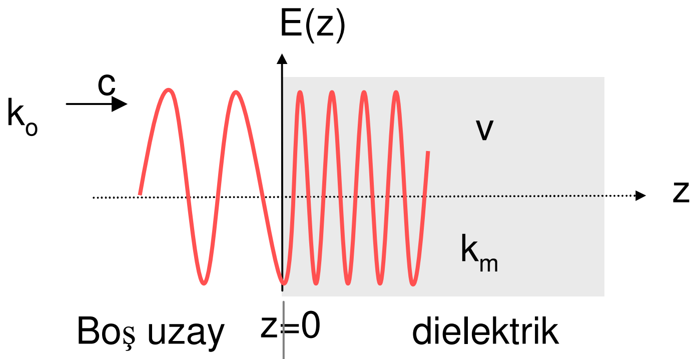
Bu sonuca göre dielektrik ortamda ilerleyen dalganın dalga parametreleri kırılma indisi ile orantılı olarak değişikliğe uğrayacaktır.

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{c}{v_m} \equiv n \\ v_m = \frac{\omega}{k_m} \\ \lambda_m \nu = v_m\end{gathered}}$$

Dalgaboyu	$\lambda_m = \dfrac{\lambda_o}{n}$	(Azalır)
Açısal frekans	$\omega_m = \omega_o = 2\pi v$	(Değişmez!)
Dalga vektörü	$k_m = \dfrac{2\pi}{\lambda_m} = n\dfrac{2\pi}{\lambda_o} = nk_o$	(Artar)

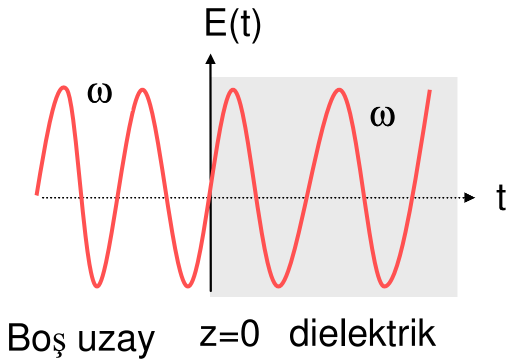
Dielektrik durum için dalga denkleminin çözümleri (+z yönünde ilerleyen dalga için)

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_o \sin(k_m.z - \omega t + \phi)$$



λ_o | $\lambda_m = \lambda_o / n$

Dalgaboyu, madde ortamında kırılma indisi (n) kadar azalmıştır



$\omega_o = \omega_m$

Açısal frekans iki ortamda da aynı

İletken Ortam-1

Durum II: $J \neq 0$ (İletken ortam, $\rho_{serbest}=0$)

İletkenlerde (örneğin altın, alüminyum, gümüş) serbest taşıyıcılar oldukça fazladır >10^{26} m^{-3}

Maxwell Denklemleri:

$$(1)\quad \vec{\nabla}.\vec{D} = 0$$

$$(2)\quad \vec{\nabla}.\vec{H} = 0$$

$$(3)\quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\mu_o \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$(4)\quad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}$$

Bağlı elektronların (dipollerden gelen katkı) etkisi yani, kutuplanma etkisi, ***D*** alanı içindedir. Bunun yanı sıra serbest elektronlardan gelecek katkı akım yoğunluğu (***J***) teriminin içindedir.

Yukarıdaki Maxwell denklemlerini çözebilmek için ***J*** ile uygulanan dış elektrik alan ***E*** arasında bir ilişki türetmemiz gerekecektir.

Eğer işlemlerimizi doğrusal malzemelere (Ohm yasasına uyan malzemeler) sınırlandırırsak ***J*** ile ***E*** arasındaki ilişki

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \qquad \text{(Ohm yasası)}$$

şeklinde yazılır. Burada σ iletkenliktir, ve öz direncin (ρ) tersi olarak tanımlanır (ρ=1/σ). Bu durumda 4. Maxwell eşitliği:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma\vec{E}$$

İletken Ortam-2

İletken ortamda Maxwell Denklemleri:

$$(1) \quad \vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{D}} = 0$$

$$(2) \quad \vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{H}} = 0$$

$$(3) \quad \vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{E}} = -\mu_o \frac{\partial \vec{\boldsymbol{H}}}{\partial t}$$

$$(4) \quad \vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{H}} = \varepsilon_o \frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t} + \vec{\boldsymbol{J}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{H}} = \varepsilon_o \frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t} + \sigma\vec{\boldsymbol{E}}$$

Boş uzay ve dielektrik ortamda yapılan işler tekrarlanırsa yukarıdaki denklemlerin çözümü olacak elektrik alanın

$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}} = \mu_o\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2} + \mu_o\sigma\frac{\partial\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$$

İletken ortamda dalga denklemi
(Manyetik alan için de benzer bir ifade yazılabilir)

şeklinde dalga denklemini sağlayacağı gösterilebilir. Görüldüğü gibi bu ifade, boş uzay ve dielektrik ortamdaki dalga denklemine benzemesine rağmen iletkenlik ifadesini içeren fazladan bir terim daha içermektedir.

Yukarıdaki dalga denklemi, ikinci dereceden kısmi diferansiyel denklemdir ve çözümleri bilinmektedir.

İletken Ortam-3

Bu iki denklemi metal ortam için yeniden çözmek yerine, dielektrik ortam için bulduğumuz çözümlere benzeterek iletken ortam için çözümler elde edebiliriz.

Dalga denkleminin metal ortamda çözümlerinin

$$\vec{\boldsymbol{E}}(r,t) = \vec{\boldsymbol{E}}_o e^{i(\vec{k}_m.\vec{r}-\omega t+\phi)} \qquad \vec{\boldsymbol{H}}(r,t) = \vec{\boldsymbol{H}}_o e^{i(\vec{k}_m.\vec{r}-\omega t+\phi)}$$

şeklinde olduğunu varsayabiliriz.

Bu çözümleri Maxwell denklemlerinde kullandığımızda aranan dalga vektörleri (k_m) Maxwell denklemleri yardımı ile bulunabilir.

Dielektrik

$$\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{E}} = +i\omega\vec{\boldsymbol{H}}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{H}} = \varepsilon(-i\omega)\vec{\boldsymbol{E}}$$

İletken

$$\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{E}} = +i\omega\vec{\boldsymbol{H}}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{H}} = \sigma\vec{\boldsymbol{E}} + \varepsilon(-i\omega)\vec{\boldsymbol{E}}$$

İletken Ortam-4

Dielektrik

$$\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{H}} = \varepsilon(-i\omega)\vec{\boldsymbol{E}}$$

İletken

$$\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{H}} = \left[\frac{\sigma}{(-i\omega)}+\varepsilon\right](-i\omega)\vec{\boldsymbol{E}}$$

Dielektrik ve iletken ortam için $\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{H}}$ denklemleri karşılaştırıldığında;

iletken ortamı temsil edecek karmaşık $\hat{\varepsilon}$ tanımı yapılarak dielektrik ortam için bulunan çözümleri kullanabiliriz.

$$\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{H}} = \left[\frac{\sigma}{(-i\omega)}+\varepsilon\right](-i\omega)\vec{\boldsymbol{E}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{H}} = \hat{\varepsilon}(-i\omega)\vec{\boldsymbol{E}}$$

Burada

$$\hat{\varepsilon} \equiv \frac{\sigma}{-i\omega}+\varepsilon = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}$$

Bu durumda karmaşık elektrik geçirgenlik cinsinden dalga denklemi

$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{E}} = \mu_o\hat{\varepsilon}\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}$$

İletken ortamda dalga denklemi

ε karmaşık sayı!

Işığın (iletken içinde) hızı $v_{iletken} = \dfrac{\omega}{k_{iletken}} = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_o\hat{\varepsilon}}}$

İletken Ortam-5

$$\boxed{\hat{\varepsilon} \equiv \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}}$$

Kırılma indisi tanımı hatırlanırsa $n = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_o}}$ => $\hat{n} = \sqrt{\dfrac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_o}}$

Kırılma indisi de (bu durumda) karmaşık sayıdır!

$$\boxed{\hat{n} = n + iK}$$ Karmaşık Kırılma İndisi (iletken ortam)

n=Kırılma indisi (Gerçek Kısım)

K=Yoketme indisi (Sanal Kısım)

Dalga Vektörü

$$\hat{k}_m = \frac{\omega}{c}\hat{n} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{k}_m = \frac{\omega}{c}(n + iK)}$$

Karmaşık Dalga Vektörü (iletken ortam)

$\mathrm{Re}(\hat{k}_m) = \dfrac{\omega}{c} n$ Dalga vektörü (gerçek)

$\mathrm{Im}(\hat{k}_m) = \dfrac{\omega}{c} K$ Dalga vektörü (sanal)

En genel durumda kırılma indisinin karmaşık bir nicelik olduğu, dolayısı ile ortamın optik özelliklerini gerçek (n) ve sanal (*K*) sabitlerin belirlediği söylenebilir.

İletken Ortam-6

Karmaşık kırılma indisi fiziksel olarak ne anlama gelir?

Bunun için karmaşık dalga vektörünü dalga çözümünde kullanalım

$$\hat{n} = n + iK \;\Rightarrow\; \hat{k}_m = \frac{\omega}{c}(n + iK) \;\Rightarrow\; \begin{cases} \mathrm{Re}(\hat{k}_m) = \dfrac{\omega}{c}\,n \\ \mathrm{Im}(\hat{k}_m) = \dfrac{\omega}{c}\,K \end{cases}$$

+z yönünde ilerleyen ışığı düşünelim $\vec{E}(z,t) = \vec{E}_o e^{i(k_m . z - \omega t + \phi)}$

Karmaşık k_m ifadesi bu çözümde kullanıldığında

$i.i=-1$ $$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_o e^{i\left[\left(\frac{\omega}{c}nz + i\frac{\omega}{c}kz\right) - \omega t + \phi\right]} \;\Rightarrow\; \vec{E}(z,t) = \vec{E}_o e^{-\frac{\omega}{c}Kz} e^{i\left[\frac{\omega}{c}nz - \omega t + \phi\right]}$$

$$\boxed{\vec{E}(z,t) = \vec{E}_o e^{-\frac{\omega}{c}Kz} e^{i\left[\frac{\omega}{c}nz - \omega t + \phi\right]} = E(z) e^{i\left[\frac{\omega}{c}nz - \omega t + \phi\right]}}$$

İletken Ortamda Elektrik Alan

Bu ifadede iki terim bulunmaktadır

Birinci terim genlik ifadesidir ve kırılma indisinin sanal teriminden (yoketme indisi) dolayı üstel olarak (z ile) azalmaktadır. Bu azalmadan serbest yükler sorumludur.

İkinci terim, salınım yapan terimdir; bu ifade içinde kırılma indisinin gerçek kısmı bulunmaktadır ve dalganın ortamda yayılma özelliğini (z ile) belirler; dielektrik ortamda bulunan sonuç gibidir.

$$\hat{n} = n + iK$$

$$c / v_m = n \qquad K \propto soğurma$$

İletken Ortam-7

Elektrik alanın genliği, z değerine bağlı olarak azalarak sıfıra gitmektedir.

$$\boxed{\vec{E}(z,t)=\vec{E}_o e^{-\frac{\omega}{c}Kz}\, e^{i\left[\frac{\omega}{c}nz-\omega t+\phi\right]}=E(z)e^{i\left[\frac{\omega}{c}nz-\omega t+\phi\right]}}$$

İletken ortamda elektrik alan

Ortamdaki enerji akısına yani Parlaklığa (Poynting vektörün zaman ortalaması) bakalım

Parlaklık $\Rightarrow$ $\left\langle\left|\vec{S}\right|\right\rangle = I = \varepsilon_o c\left\langle\left|\vec{E}\right|^2\right\rangle$

Elektrik alanın karesinin zaman ortalaması alınırsa

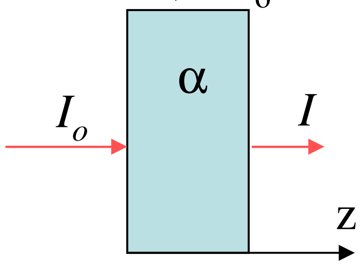
$$\boxed{I(z)=\varepsilon v_m\left|\vec{E}_o\right|^2 e^{-2(\frac{\omega}{c}Kz)}=I_o e^{-\alpha z}}$$

İletken ortamda parlaklık

Burada $\alpha \equiv \dfrac{2\omega}{c}K$ soğurma katsayısı (1/uzunluk)

Kayıp ortamı

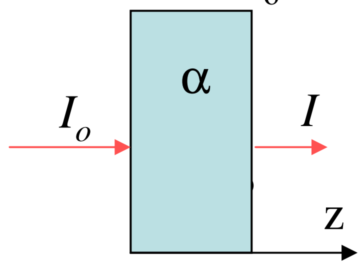
$\alpha>0,\ I<I_o$



Soğurma katsayısı α, ölçülebilir bir nicelik olup birim uzunluk başına (pratikte cm^{-1}) soğurma miktarıdır. Kayıplı ortamda α pozitif değere sahip olmasına rağmen kazanç ortamında (lazer kovuğu) negatif işarete sahiptir.

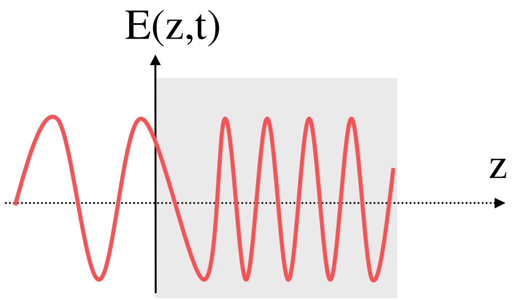
Kazanç ortamı

$\alpha<0,\ I>I_o$



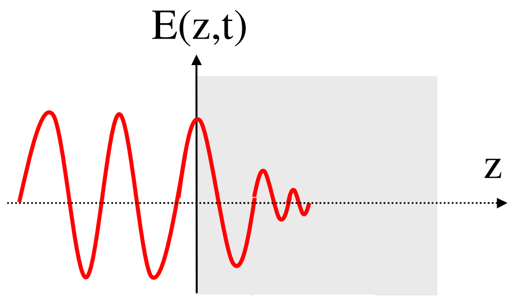
Madde Ortamında Işık

Boşluktan iletken bir ortama giren ışığın genliği, yoketme indisinin (K) sıfırdan farklı (ve pozitif) olmasından dolayı azalır (soğrulur). Dielektik ortamda yoketme indisi sıfır olduğu için genlikte bir azalma (soğrulma) olmaz.



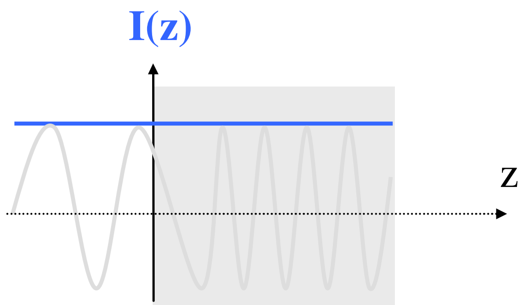
Boş uzay z=0 dielektrik

$$\vec{E}(z,t) = e^{i\left[\frac{\omega}{c}nz - \omega t + \phi\right]}$$



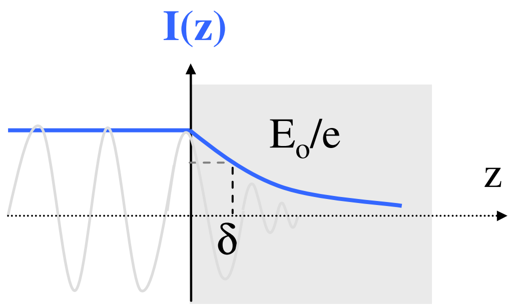
Boş uzay z=0 iletken

$$\vec{E}(z,t) = E(z)e^{i\left[\frac{\omega}{c}nz - \omega t + \phi\right]}$$



Boş uzay z=0 dielektrik

$$I(z) = I_o$$



Boş uzay z=0 iletken

$$I(z) = I_o e^{-\alpha z}$$

Genliğin e^{-1} değerine düştüğü z değerine (δ) "sızma derinliği (penetration dept)" denir.

$e^{-1} = 1/2.7 \approx 1/3$

Bakır (morötesi λ_o=100 nm) δ=0.6 nm
(kızılaltı λ_o=10 000 nm) δ=6 nm

Maddenin Optik Sabitleri

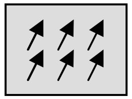
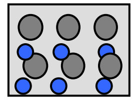
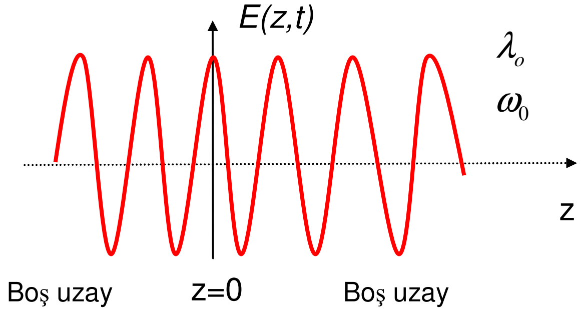
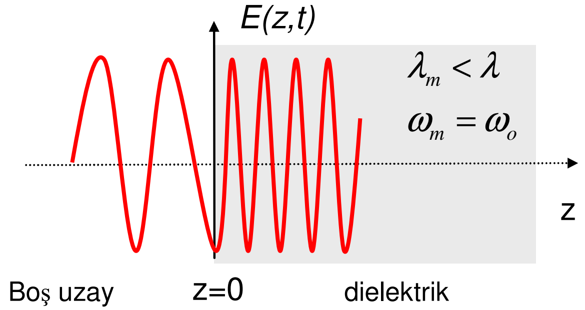
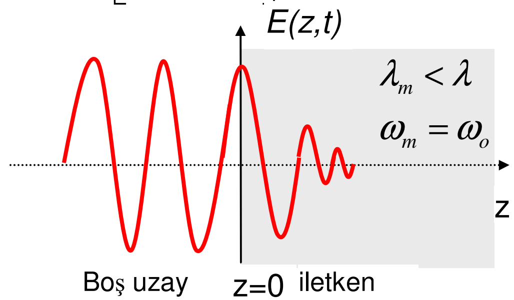
Ortamın optik özelliğini karmaşık kırılma indisi verir (hem soğurmayı (yoketme indisi) hem de dalganın ilerleyişini (kırılma indisi) karakterize eden nicelikleri barındırdığı için)

$$k_m = \frac{\omega}{c} n \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(z,t) = \vec{E}_o e^{i(\frac{\omega}{c} nz - \omega t + \phi)} \qquad \text{Dielektrik } (\sigma=0)$$

$$\hat{k}_m = \frac{\omega}{c}(n + iK) \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(z,t) = \vec{E}_o e^{i\left[(\frac{\omega}{c} nz + i\frac{\omega}{c} kz) - \omega t + \phi\right]} \qquad \text{İletken } (\sigma \neq 0)$$

$$\text{Parlaklık} \quad \Rightarrow \quad I(z) = I_o \mathrm{e}^{-\alpha z} \qquad \alpha \equiv \frac{2\omega}{c} K$$

- Eğer bir ortamda dipollere ek olarak serbest taşıyıcılar da var ise ortamın kırılma indisinin karmaşık bir sayı ile ifade edilmesi gerekecektir. Bu durumda kırılma indisinin gerçek kısmı dalganın ortamdaki ilerlemesini, sanal kısmı (yoketme indisi) ise ortamda soğrulmasını göstermektedir.
- Kırılma indisinin hem gerçek hem de sanal kısımları frekansa çok sıkı bağlıdır. Belli bir dalga boyunda geçirgen olan (sanal kırılma indisi sıfır) başka bir dalgaboyunda çok iyi bir soğurucu olabilir.
- Bazı durumlarda ise kırılma indisi tümüyle sanal olabilir (Bölüm 6). Bu durumda ortam mükemmel ayna gibi davranır ve ortamda ilerleyen dalga bulunmaz, ara yüzeye gelen ışık tümüyle yüzeyden geri yansır.

Boş Uzay	Dielektrik Ortam J=0	Metalik Ortam J≠0
ρ=0 J=0 P=0  ε_o, μ_o	ρ=0 J=0 P≠0 ⇨ $P=\varepsilon_o\chi E_o$  ε, μ_o	ρ=0 J≠0 ⇨ J=σE $P \neq 0$ ⇨ $P=\varepsilon_o\chi E$  $\hat{\varepsilon}, \mu_o$
$\vec{\nabla}.\vec{E}=0$ $\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\mu_o\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ $\quad \vec{D}\equiv\varepsilon_o\vec{E}$ $\vec{\nabla}.\vec{H}=0$ $\quad \vec{\nabla}\times\vec{H}=\varepsilon_o\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\vec{\nabla}.\vec{D}=0$ $\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\mu_o\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ $\quad \vec{D}\equiv\varepsilon_o\left[\vec{E}+\vec{P}\right]=\varepsilon\vec{E}$ $\vec{\nabla}.\vec{H}=0$ $\quad \vec{\nabla}\times\vec{H}=\varepsilon_o\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\vec{\nabla}.\vec{D}=0$ $\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\mu_o\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ $\vec{\nabla}.\vec{H}=0$ $\quad \vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\varepsilon_o\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
$c=\nu\lambda$	$v_m=\nu\lambda_m$	$v_m=\nu\lambda_m$
$n=\frac{c}{v}=\frac{c}{c}=1$	$n=\frac{c}{v_m}>1$	$n=\frac{c}{v_m}=\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_o}>1$
$k_o=\frac{\omega}{c}$	$k_m=\frac{\omega}{c}n=k_o n$	$\hat{k}_m=\frac{\omega}{c}(n+iK)$
$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_o}}$	$v_m=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon}}$	$v_m=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\hat{\varepsilon}}}$
$\vec{E}(z,t)=\vec{E}_o e^{i(k_o z-\omega t+\phi)}$	$\vec{E}(z,t)=\vec{E}_o e^{i(k_m z-\omega t+\phi)}$	$\vec{E}(z,t)=\vec{E}_o e^{i(\hat{k}_m z-\omega t+\phi)}$
$\vec{E}(z,t)=\vec{E}_o\sin(\frac{\omega}{c}z-\omega t+\phi)$  	$\vec{E}(z,t)=\vec{E}_o\sin(\frac{\omega}{c}nz-\omega t+\phi)$  	$\vec{E}(z,t)=\left[\lvert\vec{E}_o\rvert e^{-\frac{\omega}{c}Kz}\right]\sin(\frac{\omega}{c}nz-\omega t+\phi)$ 

Özet

Madde ortamında ışığın hızı $\boxed{v_m = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon}}}$

Kırılma indisi tanımı $\boxed{n \equiv \frac{c}{v_m} = \frac{(\frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}})}{(\frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon}})} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_o}}}$

Dielektrik sabiti $\boxed{\kappa \equiv \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} = n^2}$

Kırılma indisi cinsinde madde ortamında ışığın hızı $\boxed{v = \frac{c}{n}}$

Kırılma indisi en genel durumda karmaşık bir sayıdır: $\boxed{\hat{n} = n + iK}$

Gerçek kısmı => n=Kırılma indisi
Sanal kısmı => K=Yoketme (extinction) indisi

Kırılma indisinin gerçek kısmı (n) ışığın madde ortamında ilerleme hızını, sanal kısmı (K) ise ışığın ortam tarafından soğrulmasını ifade eder.

UADMK - Açık Lisans Bilgisi