Bölüm 4: Demet Optiği
Alıştırmalar

4.1 Paraksiyel dalga denklemini

$$\nabla_T^2\psi - 2ik\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

türetiniz.

Çözüm:
z-doğrultusunda ilerleyen ışığın elektrik alanının uzay bağımlılığı

$$E(x,y,z) = E_o\psi(x,y,z)e^{-ikz}$$

Buradan

$$\nabla_T^2 E = \nabla_T^2\psi E_o e^{-ikz}$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial z}E_o e^{-ikz} + E_o\psi(-ik)e^{-ikz}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = E_o\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}e^{-ikz} - 2ikE_o\frac{\partial \psi}{\partial z}\psi e^{-ikz} - E_o\psi k^2 e^{-ikz}$$

$$\nabla_T^2\psi - 2ik\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

4.2 Paraksiyel yaklaşımda ($(x^2+y^2)^{1/2} << z^2$) küresel dalganın

(a) $\vec{E}(r,t) = (\frac{\vec{E}_o}{z})e^{-ik[z+(\frac{x^2+y^2}{2z})]}e^{i\omega t}$ şeklinde verileceğini gösteriniz.

(b) z'nin çok büyük olduğu durumda ($z \to \infty$) küresel dalganın düzlem dalgaya dönüştüğünü gösteriniz.

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_o e^{-i(kz+\omega t)}$$

Çözüm:

(a) Küresel dalga ifadesi

$$\vec{E}(r,t) = (\frac{\vec{E}_o}{r})e^{-i(kr-\omega t)}$$

paraksiyel yaklaşım durumunda ($(x^2+y^2)^{1/2} << z^2$)

$\theta^2 = \dfrac{(x^2 + y^2)}{z^2} \ll 1$ kısaltması yapılırsa

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = z(1+\theta^2)^{1/2} = z(1+\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{8} + ...)$$

$\theta^2 \cong 1$ olduğu düşünülürse daha küçük terimler ihmal edilebilir. Bu durumda

$$r \cong z(1+\frac{\theta^2}{2}) = z + \frac{x^2 + y^2}{2z}$$

Yukarıdaki eşitlikte genlik ifadesinde r=z ve faz ifadesinde $r = z + \dfrac{x^2+y^2}{2z}$ yazarsak (faz ifadesi üstel fonksiyon içerdiğinden küçük değişimlere daha duyarlıdır, genlikte 1/r şeklinde olduğu için r=z yazabiliriz)

$$\vec{E}(r,t) = (\frac{\vec{E}_o}{z})e^{-ik[z+(\frac{x^2+y^2}{2z})]}e^{i\omega t}$$

(b) z çok büyük olduğunda eşitlik x deki faz ifadesi kz'değerine yaklaşır, genlik ise büyük z değerlerinde konumla çok az değiştiği için genlik, düzlem dalgalarda olduğu gibi sabit bir değere sahipmiş gibi bakılabilir.

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_o e^{-i(kz+\omega t)}$$