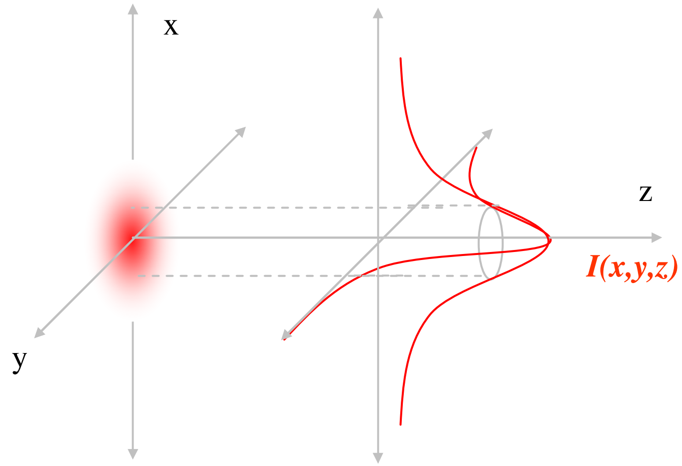
4. Ders

Demet Optiği



Bu bölümü bitirdiğinizde,

- Düzlem dalgalar,
- Küresel dalgalar,
- Paraksiyel yaklaşım,
- Işığın elektrik alanının uzaysal dağılımı,
- Gauss benzeri demet

konularında bilgi sahibi olacaksınız.

Dördüncü Ders: İçerik

- Düzlem Dalgalar
- Küresel Dalgalar
- Demet Optiği
  - Temel Gauss Benzeri Demet
  - Eliptik Gauss Benzeri Demet

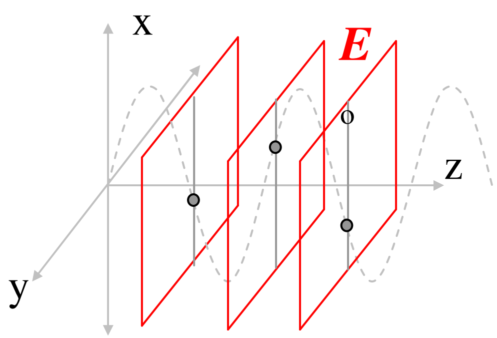
Düzlem Dalgalar

Maxwell denklemlerini sağlayan elektrik ve manyetik alanların klasik dalga denklemini sağladığını ve dalga denkleminin bir çözümünün düzlem dalgalar olduğunu gördük.

Düzlem dalgalar

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{r},t)=\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{o}}e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t+\phi)}$$

şeklinde konum (***r***) ve zamanın (t) fonksiyonu olarak yazılabilir. $\boldsymbol{E_o}$ elektrik alanın genliğini verir ve değeri uzay ve zamandan bağımsız olarak sabittir.

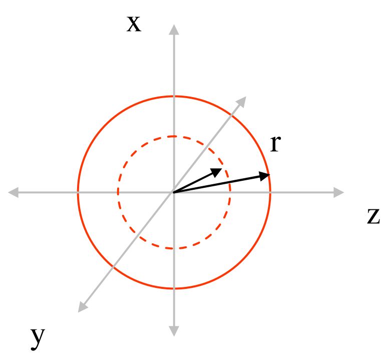


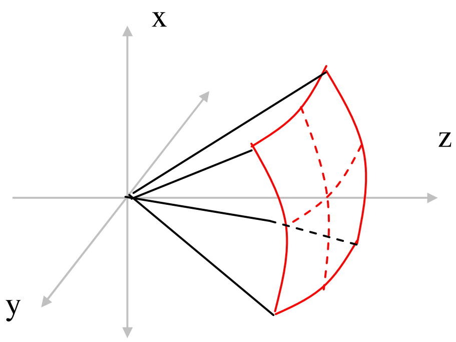
Dalganın, ilerleme doğrultusuna dik düzlemde alan genliği (elektrik ve manyetik alanlar) sabittir ve belli bir noktada (ve zamanda) değeri xy düzleminde sonsuza kadar uzanır.

Alanın genliğinin ve dolayısı ile parlaklığının (şiddetin) sabit olması çok gerçekçi değildir.

Küresel Dalgalar

Düzlem dalga çözümleri ideal durumu gösterir. Gerçek (noktasal) ışık kaynağından çıkan ışık düzlem dalga değil küresel dalgalar şeklinde her doğrultuda yayılır.





Noktasal kaynak söz konusu olunca Maxwell denklemlerini sağlayan ***E*** ve ***H*** alanları küresel koordinatlarda,

$$\frac{\partial^2\left[r\vec{E}(r,t)\right]}{\partial r^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\left[r\vec{E}(r,t)\right]}{\partial t^2}$$

şeklinde verilir (dik koordinatlardakinden farklı olarak konuma (r) bağlılığa dikkat ediniz). Burada $r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ konum vektörü, t ise zamandır. Bu dalga denkleminin çözümü

$$\vec{E}(r,t)=(\frac{\vec{E}_o}{r})\sin\left[(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)+\phi\right]$$

Küresel Dalgalar-2

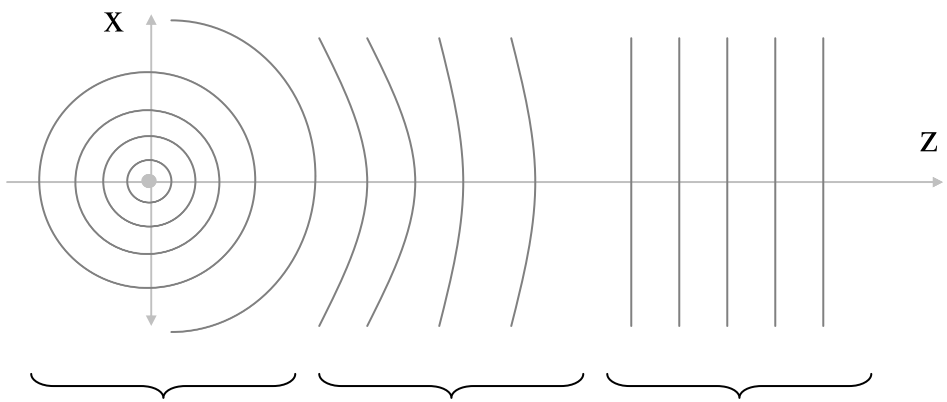
Görüldüğü gibi genlik artık, düzlem dalgalarda olduğu gibi sabit (E_o) değil (E_o/r) ile (Enerjinin korunumu gereği) azalmaktadır.

$$\vec{E}(r,t) = (\frac{\vec{E}_o}{r})\sin\left[(\vec{k}.\vec{r} - \omega t) + \phi\right]$$

Paraksiyel yaklaşımda (yayılma doğrultusu z eksenine çok yakın olduğunda, $(x^2+ y^2)^{1/2} << z^2$) yukarıdaki eşitlik

$$\vec{E}(r,t) = (\frac{\vec{E}_o}{z})e^{-ik[z+(\frac{x^2+y^2}{2z})]}e^{i\omega t}$$ Paraksiyel yaklaşım

z'nin çok büyük olduğu durumda ($z \rightarrow \infty$) ifadede faz *kz* değerini alır. Bu durumda dalga düzlem dalgaya dönüşür.



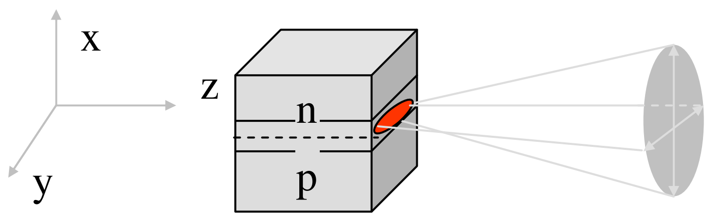
küresel dalga parabolik dalga düzlem dalga

Demet Optiği-1

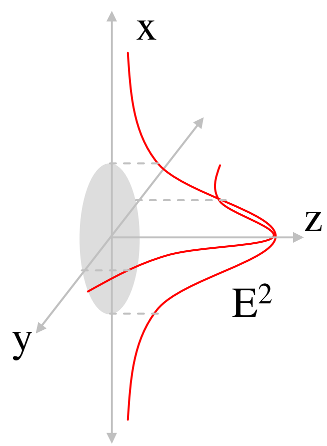
Gerçekte, bir ışık kaynağından çıkan ışık demeti ne düzlem dalga ne de tam olarak küresel dalga şeklindedir.

Özellikle optoelektronikte, örneğin yarıiletken lazerden çıkan ışık demeti yönlenmiş ışıktır ve yayılması enlemsel değil bir eksen boyuncadır.

Bu durumda daha önce bulunan çözümler nasıl düzenlenebilir?



Yarıiletken lazer



Işık demetinin uzaysal dağılımı

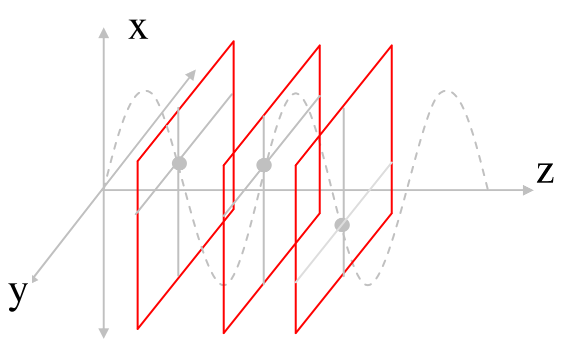
Demet Optiği-2

Dalga çözümlerinde elektrik alan ifadesi zaman ve konum bileşenlerine ayrılarak

$$E(x, y, z, t) = E(x, y, z)E(t)$$

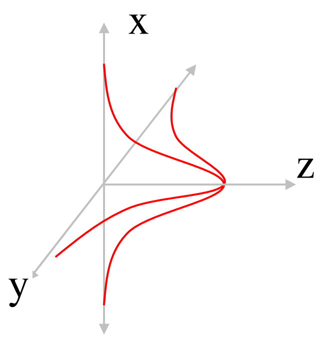
şeklinde yazılabilir. Alanın uzaysal dağılımı bulunduktan sonra zamanı içeren terim her zaman eklenerek alanın zaman içinde değişimi bulunabilir. Elektrik alanın konuma bağlılığı

$$\nabla^2 E(x, y, z) + k^2 E(x, y, z) = 0$$ ***Helmholtz Denklemi***



$$E(x, y, z) = E_o e^{-ikz}$$

düzlem dalga



$$E(x, y, z) = E_o \psi(x, y, z) e^{-ikz}$$

demet

Demet Optiği: Paraksiyel Dalga Denklemi

$$\nabla^2 E(x, y, z) + k^2 E(x, y, z) = 0$$

Burada

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla_T^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Yayılma doğrultusu (z) ve yayılma doğrultusuna dik düzlem (xy) ifadelerini içeren eşitlik iki parçaya ayrılarak aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$\nabla^2 E(x, y, z) + k^2 E(x, y, z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla_T^2 E + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2 E = 0$$

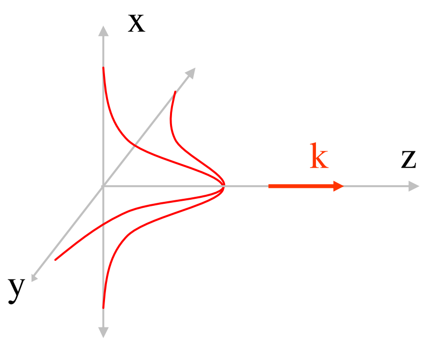
alan $E(x, y, z) = E_o \psi(x, y, z) e^{-ikz}$ şeklinde ifade edilirse, alan genliği ψ

$$\nabla_T^2 \psi - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

Paraksiyal Dalga Denklemi

Bu denklemi sağlayan ψ çözümleri bulunacaktır. ψ(x,y,z) fonksiyonunun bulunması ile genliğin konuma göre nasıl değiştiği bilgisi de elde edilmiş olur.

Demet Optiği-4



$$\nabla_T^2\psi - 2ik\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0$$

Paraksiyal Dalga Denklemi

Yukarıdaki denklemin çözümünü basitleştirmek için bazı yaklaşıklıklar yapılabilir. ψ genliği, yayılma doğrultusu z ile yavaş değiştiğinden (x) ve dalga vektörü ***k*** ışık için büyük olduğundan, ($k=2\pi/\lambda=10^6$ m^{-1})

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} << k\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$\nabla_T^2\psi - 2ik\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0 \Longrightarrow \nabla_T^2\psi - 2ik\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0$$

şekline indirgenebilir.

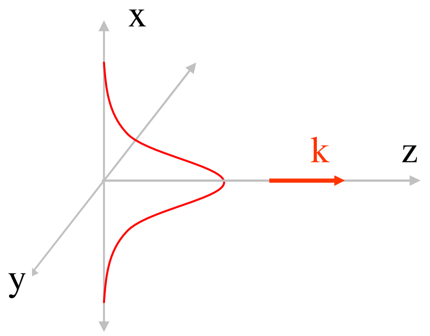
Temel Gauss Benzeri Demet-1

Aranılan çözüm

$$E(x,y,z)=\left[E_o\frac{\omega_o}{\omega(z)}e^{\frac{-r^2}{\omega^2(z)}}\right].\left[e^{-i[kz-\tan^{-1}(\frac{z}{z_o})]}\right].\left[e^{-\frac{r^2k}{2R(z)}}\right]$$

şeklinde ifade edilen Temel Gauss benzeri demet şekildedir.

Burada $r=\sqrt{x^2+y^2}$ yayılma doğrultusuna dik düzlemdeki konum vektörü, ω_o, z=0 da Gauss benzeri demetin eni, n dalganın ilerlediği ortamın kırılma indisi, λ_o ise ışığın boşluktaki dalgaboyudur.



$$\omega(z)=\omega_o\left[1+(\frac{z}{z_o})^2\right]^{1/2}$$

$$R(z)=z\left[1+(\frac{z_o}{z})^2\right]$$

$$z_o\equiv\frac{\pi\omega_o^2 n}{\lambda_o}$$

Temel Gauss Benzeri Demet-2

Çözümde üç farklı terim vardır.

$$E(x,y,z)=\underbrace{\left[E_o\frac{\omega_o}{\omega(z)}e^{\frac{-r^2}{\omega^2(z)}}\right]}_{\text{Genlik}}.\underbrace{\left[e^{-i[kz-\tan^{-1}(\frac{z}{z_o})]}\right]}_{\text{Boylamasına faz}}.\underbrace{\left[e^{-\frac{r^2k}{2R(z)}}\right]}_{\text{Enlemsel (çapsal) faz}}$$

Genlik, dalganın ilerleme doğrultusuna (z) bağlı olarak alanın xy düzlemindeki değişimini verir,

Boylamasına Faz, dalganın ilerleme doğrultusuna (z) bağlı olarak faz açısının değişimini verir,

Enlemsel (çapsal) Faz, ise herhangi bir z noktasında, dalganın xy düzlemindeki faz açısının değişimini verir.

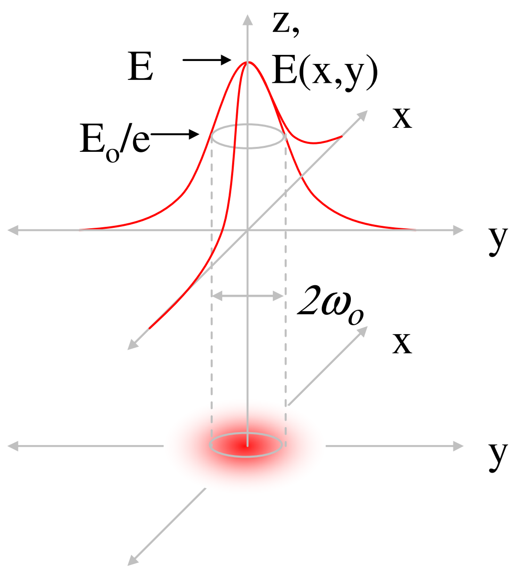
Bu terimlere ayrıntılı bakalım:

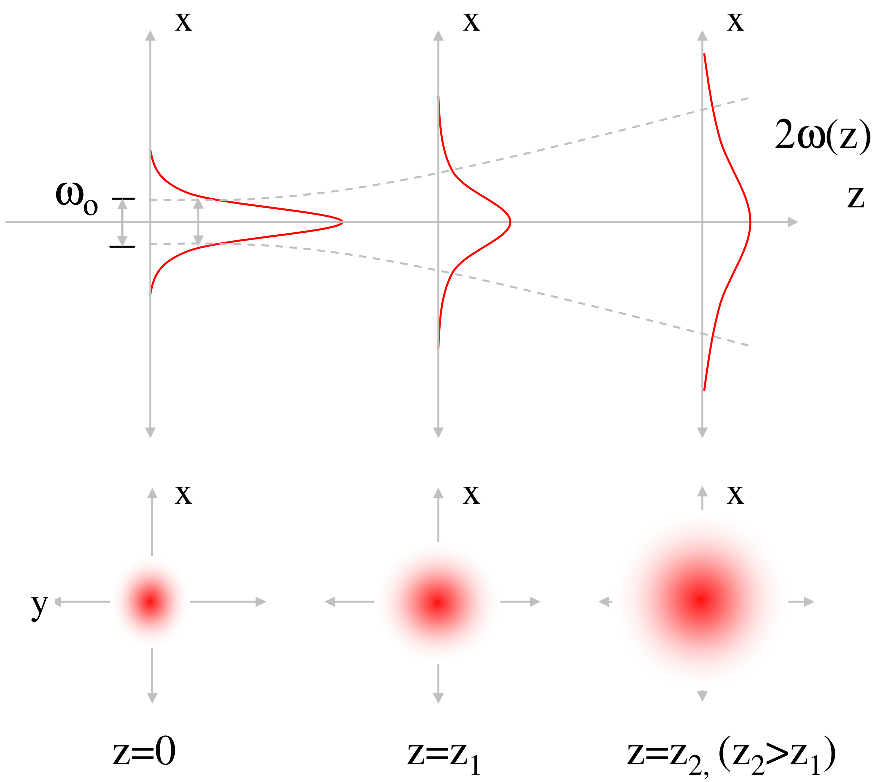
Temel Gauss Benzeri Demet: Genlik-1

$$E(x,y,z) \propto E_o \frac{\omega_o}{\omega(z)} e^{\frac{-(x^2+y^2)}{\omega^2(z)}}$$

Demet, z=0 noktasında en dar çapa sahiptir. Demet ilerleyince demet çapı genişlemeye başlayacaktır. Demetin z=0 noktasındaki çapı bilinirse ilerleme doğrultusuna göre nasıl değiştiği bulunabilir.

$$\omega(z_o) = \sqrt{2}\omega_o$$





Temel Gauss Benzeri Demet: Faz

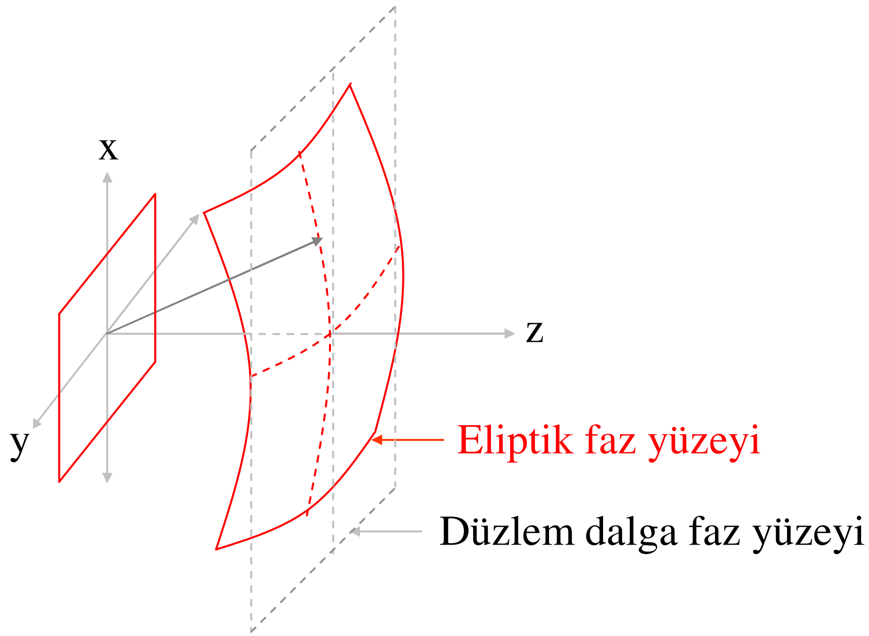
İki terim bulunmaktadır. Bunlardan biri yayılma doğrultusundaki (z-ekseni) boylamasına faz faktörü, diğeri ise xy düzlemindeki enine doğrultudaki faz ifadesidir (Düzlem dalgada sadece boylamasına faz farkı oluşmaktadır).

Boylamasına faz ifadesi: $$\phi = kz - \tan^{-1}(\frac{z}{z_o})$$

z= – ∞ olduğunda –π/2, z=∞ olduğunda ise π/2 değerini almaktadır. Fazdaki bu değişme ***Guoy etkisi*** olarak bilinir. Buna göre dalganın fazı dalga –∞ dan +∞'a kadar hareket ettiğinde π kadar gecikmeye uğrar.

Enlemesine faz ifadesi, demetin yayılma doğrultusuna dik düzlemdeki faz dağılımını veriri.

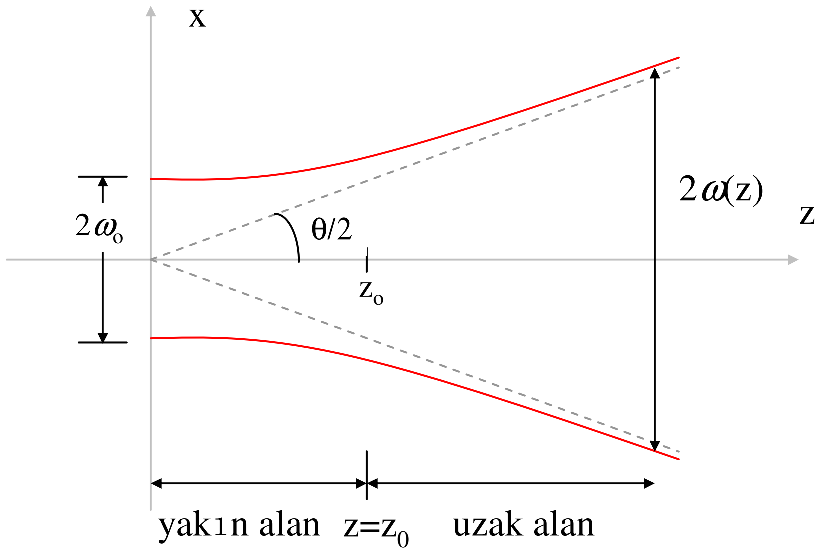
$$\phi' = \frac{kr^2}{2R(z)}$$



Temel Gauss Benzeri Demet: Uzak Demet Alanı

z → ∞ durumuna, uzak alan durumuna bakalım:

$$\omega(z) = \omega_o \left[1 + \left(\frac{z}{z_o}\right)^2 \right]^{1/2} \Rightarrow \omega(z) = \left(\frac{\omega_o}{z_o}\right) z \qquad \omega(z) \cong \frac{\omega_o \lambda}{\pi \omega_o^2 n} z = \frac{\lambda}{\pi \omega_o n} z$$



$$\frac{d\omega(z)}{dz} = \frac{\lambda_o}{\pi \omega_o n} = \frac{\theta}{2}$$

$$2\theta \cong \frac{4\lambda_o}{3\omega_o}$$

$$\theta = \frac{2\lambda_o}{\pi \omega_o n}$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_o}{z}\right)^2 \right] \Rightarrow R(z) = z$$

z → ∞ durumunda, demetin genişlemesi doğrusal olmaktadır.

Yüksek Dereceden Modlar-1

Şimdiye kadar olan incelemede temel Gauss benzeri demetin çözümlerine bakıldı.

Temel Gauss benzeri mod, yayılma doğrultusu z ve z eksenine dik düzlemde r noktasındaki demetin dağılımını verir.

Daha genel bir inceleme ile, eksen dışındaki bir noktadaki dağılımı bulunabilir. Bu çözümler yüksek dereceden modlardır ve aşağıdaki şekilde

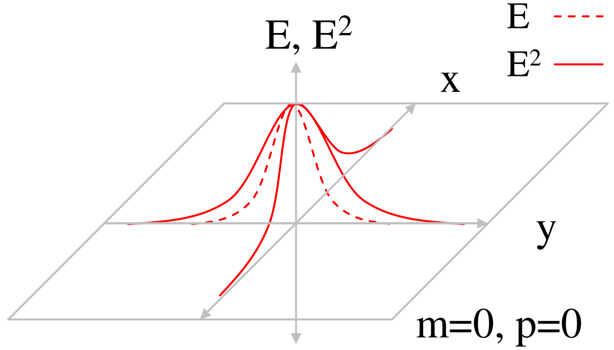
$$\frac{E(x,y,z)}{E_{m,p}} = H_m\left[\frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)}\right].H_p\left[\frac{\sqrt{2}y}{\omega(z)}\right]\frac{\omega_o}{\omega(z)}e^{-\frac{(x^2+y^2)}{\omega(z)}}e^{-i\left[kz-(1+m+p)\tan^{-1}\left(\frac{z}{z_o}\right)\right]}e^{-\frac{ikr^2}{2R(z)}}$$

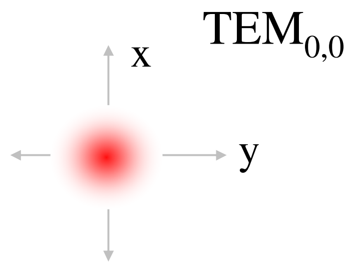
Yüksek Dereceden Modlar

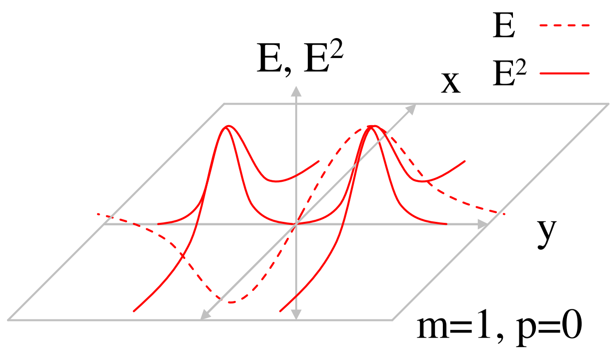
verilir. Burada H_m, m. mertebeden Hermite Polinomu, diğer simgeler ise daha önce tanımlandığı gibidir.

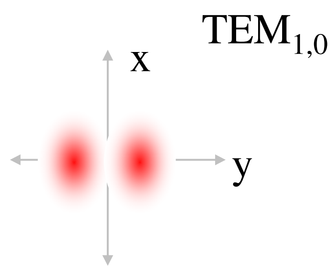
Yüksek Dereceden Modlar-2

$$\frac{E(x,y,z)}{E_{m,p}} = H_m\left[\frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)}\right].H_p\left[\frac{\sqrt{2}y}{\omega(z)}\right]\frac{\omega_o}{\omega(z)}e^{-\frac{(x^2+y^2)}{\omega(z)}}e^{-i\left[kz-(1+m+p)\tan^{-1}(\frac{z}{z_o})\right]}e^{-\frac{ikr^2}{2R(z)}}$$



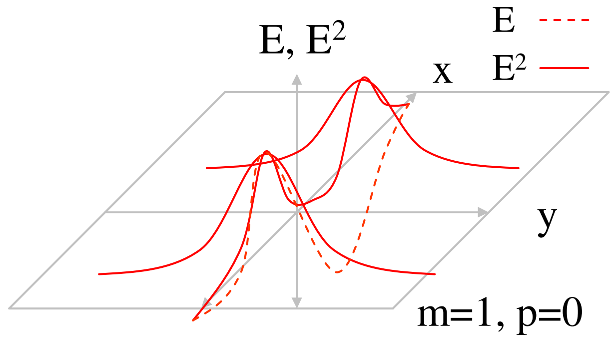


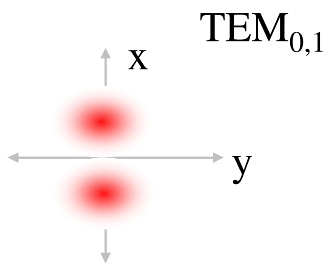


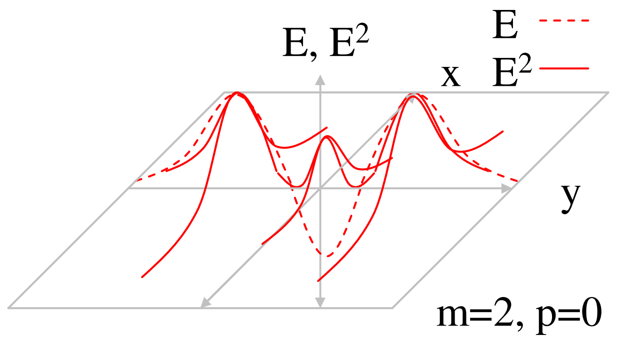


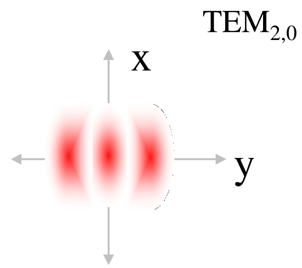
Yüksek Dereceden Modlar-3

$$\frac{E(x,y,z)}{E_{m,p}} = H_m\left[\frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)}\right].H_p\left[\frac{\sqrt{2}y}{\omega(z)}\right]\frac{\omega_o}{\omega(z)}e^{-\frac{(x^2+y^2)}{\omega(z)}}e^{-i\left[kz-(1+m+p)\tan^{-1}(\frac{z}{z_o})\right]}e^{-\frac{ikr^2}{2R(z)}}$$







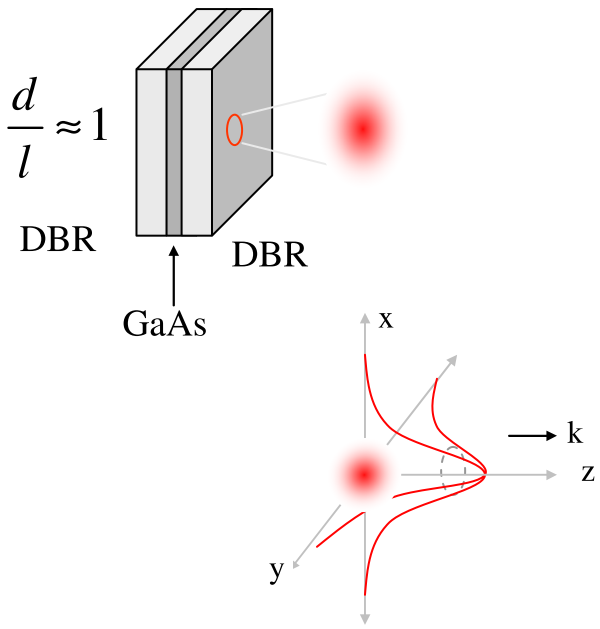


Eliptik Gauss Benzeri Demet

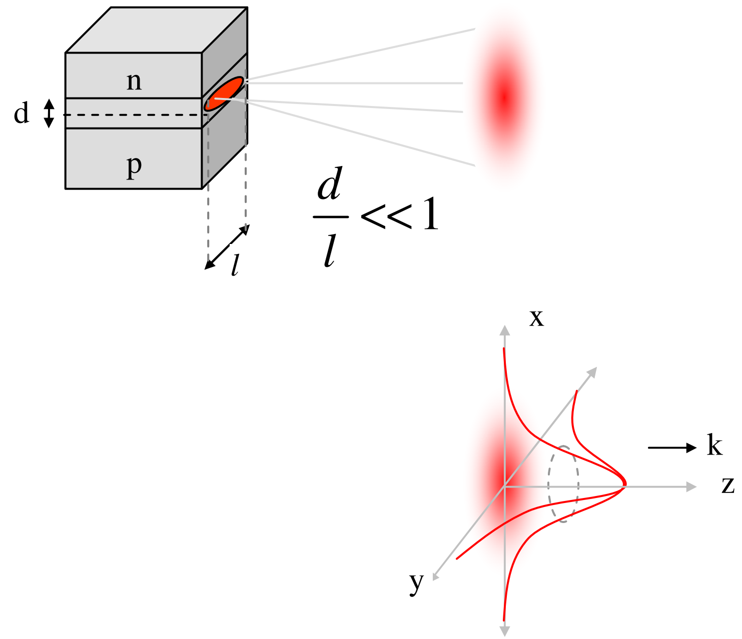
Şimdiye kadar yaptığımız kabullerden biri de demetin çapının dairesel olduğu, yani x ve y doğrultularına eşit yayıldığıydı. Oysa pratikte ışık kaynaklarından eliptik dağılıma sahip ışık salınabilir.

Yarıiletken lazerlerde (kenardan ışıma yapan lazerler) aktif bölgenin boyutları farklı olduğundan çıkan ışığın dağılımı dairesel değil daha çok eliptik dağılıma sahiptir.

Yüzey yayımlı yarıiletken lazer (VCSEL)



Kenar ışımalı yarıiletken lazerler



Bu durumun analizi karmaşık matematiksel işlemler gerektiğinden bu dersin kapsamı dışında tutulmuştur.

Özet

Optoelektronikte kullanılan ışık düzlem dalga değil daha çok demet şeklindedir. Paraksiyel yaklaşımla ışık demetini oluşturan alanların uzaysal dağılımı bulunabilir.

Yayılma doğrultusuna dik doğrultuda ve eksene yakın durumlarda (paraksiyel yaklaşım) alan simetrik ise çözümler temel Gauss benzeri modu ile ifade edilebilir. Eksenden uzak noktalardaki demet alanını bulmak biraz daha karışıktır ve yüksek dereceden modlarla ifade edilir.

Alan dağılımının simetrik olmadığı (elips) durumlarda Eliptik Gauss benzeri modda çözümler bulunur.

UADMK - Açık Lisans Bilgisi

Bu ders malzemesi öğrenme ve öğretme yapanlar tarafından açık lisans kapsamında ücretsiz olarak kullanılabilir. Açık lisans bilgisi bölümü yani bu bölümdeki, bilgilerde değiştirme ve silme yapılmadan kullanım ve geliştirme gerçekleştirilmelidir. İçerikte geliştirme değiştirme yapıldığı takdirde katkılar bölümüne sadece ekleme yapılabilir. Açık lisans kapsamındaki malzemeler doğrudan ya da türevleri kullanılarak gelir getirici faaliyetlerde bulunulamaz. Belirtilen kapsam dışındaki kullanım açık lisans tanımına aykırı olduğundan kullanım yasadışı olarak kabul edilir, ilgili açık lisans sahiplerinin ve kamunun tazminat hakkı doğması söz konusudur.