Bölüm 10: Elektro-Optik
Alıştırmalar

9.1 Elektro-optik etkinin sadece merkezi tersinir simetriye sahip olmayan malzemelerde gözlenebileceğini gösteriniz.

Çözüm:

Merkezi tersinir simetriye sahip kristallerde uygulanan dış elektrik alanın uygulanması ile elde edilen kırılma indisindeki değişim

$$\Delta n_+ = rE_+$$

Elektrik alanın (***E***) sadece yönü değiştirildiğinde (***E*** → ***-E***) kırılma indisindeki değişim

$$\Delta n_- = r(-E_-)$$

Tersinir simetriye sahip kristallerde her iki doğrultu da özdeş olduğundan uygulanan her iki yönde oluşan kırılma indis değişiminin de aynı olması beklenir.

$$\Delta n_+ = \Delta n_-$$

$$\Delta n_+ = \Delta n_+ \Rightarrow rE = r(-E)$$

Bu durumun, r=-r şartını getireceği için ($E \neq 0$) olası çözüm

$$r = 0$$

şartının sağlanması ile mümkün olur ki bu elektro-optik etkinin görüşmeyeceği anlamına gelmektedir.
(Merkezi tersinir simetriye sahip kristallerde, uygulanan dış elektrik alandan dolayı kırılma indisindeki değişim, Δn_1=rE, Alanın yönü değiştirildiğinde (***E*** → ***-E***) kırılma indisindeki değişim, Δn_2=r(-E). Tersinir simetriye sahip kristallerde her iki yön de aynı özeeliğe sahip olacağından kırılma indisleri de aynı olmak zoruna ($\Delta n_1 = \Delta n_2$), dolayısı ile bu durum r=-r koşulunu getirdiğinden bu durumun sağlanması için çözümün r=0 olmasıdır.

9.2 Optik ekseni z doğrultusu boyunca olan tek eksenli ($n_x=n_y=n_o$, $n_z=n_e$) tetragonal 42m kristaline (örneğin KDP),
(a) optik eksen (z-eksen) doğrultusunda uygulanan elektrik alanın $E(0,0,E_z)$ sonucunda kırılma indisinde oluşacak değişiklikleri hesaplayınız.
(b) Eğer elektrik alan E_y doğrultusunda $E(0, E_y, 0)$ olursa ne olur?
(c) Eğer elektrik alan E_x doğrultusunda $E(E_x, 0, 0)$ olursa ne olur?

Çözüm:

(a)

$$\Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_l = \sum_{k=1}^{3} r_l E_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{1}{n_o^2}\right](x^2+y^2) + \left[\frac{1}{n_e^2}\right] z^2 + 2r_{63}E_z xy = 1$$

İndis ellipsoidi z-ekseni boyunca dönmüştür. Gerekli koordinat dönüşümleri yapılırsa

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{1}{n_o^2} + r_{63}E_z\right] X^2 + \left[\frac{1}{n_o^2} - r_{63}E_z\right] Y^2 + \left[\frac{1}{n_e^2}\right] Z^2 = 1$$

$$\frac{1}{n_x^2} = \frac{1}{n_o^2} + r_{63}E_z \qquad n_x(E) \cong n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_z$$

$$\frac{1}{n_y^2} = \frac{1}{n_o^2} - r_{63}E_z \qquad n_y(E) \cong n_o + \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_z$$

$$\frac{1}{n_z^2} = \frac{1}{n_e^2} \qquad n_z(E) = n_e$$

Başlangıçta tek eksenli olan kristal ($n_x=n_y=n_o$, $n_z=n_e$) elektrik alanın optik eksen (z-ekseni) doğrultusunda uygulanması ile çift eksenli kristal ($n_x=n_o-\Delta$, $n_y=n_o+\Delta$, $n_z=n_e$) haline dönüştü.

(b) Eğer elektrik alan E_y doğrultusunda $E(0, E_y, 0)$ olursa ne olur?

$$\Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_l = \sum_{k=1}^{3} r_l E_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{1}{n_o^2}\right](x^2+y^2) + \left[\frac{1}{n_e^2}\right] z^2 + 2r_{41}E_x xz = 1$$

Gerekli koordinat dönüşümleri yapılırsa (y-ekseni etrafında)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{1}{n_o^2} + r_{41}E_z\right] X^2 + \left[\frac{1}{n_o^2} - r_{41}E_z\right] Y^2 + \left[\frac{1}{n_e^2}\right] Z^2 = 1$$

$$\frac{1}{n_x^2} = \frac{1}{n_o^2} + r_{41}E_z \qquad n_x(E) \cong n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{41} E_z$$

$$\frac{1}{n_y^2} = \frac{1}{n_o^2} - r_{41}E_z \qquad n_y(E) \cong n_o + \frac{1}{2} n_o^3 r_{41} E_z$$

$$\frac{1}{n_z^2} = \frac{1}{n_e^2} \qquad n_z(E) = n_e$$

(c)

$$\Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_l = \sum_{k=1}^{3} r_l E_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{1}{n_o^2}\right](x^2+y^2)+\left[\frac{1}{n_e^2}\right]z^2+2r_{41}E_x yz=1$$

Gerekli koordinat dönüşümleri yapılırsa (x-ekseni etrafında)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{1}{n_o^2}+r_{41}E_z\right]X^2+\left[\frac{1}{n_o^2}-r_{41}E_z\right]Y^2+\left[\frac{1}{n_e^2}\right]Z^2=1$$

$$\frac{1}{n_x^2}=\frac{1}{n_o^2}+r_{41}E_z \qquad n_x(E)\cong n_o-\frac{1}{2}n_o^3 r_{41}E_z$$

$$\frac{1}{n_y^2}=\frac{1}{n_o^2}-r_{41}E_z \qquad n_y(E)\cong n_o+\frac{1}{2}n_o^3 r_{41}E_z$$

$$\frac{1}{n_z^2}=\frac{1}{n_e^2} \qquad n_z(E)=n_e$$

9.3 Optik ekseni z doğrultusu boyunca olan izotropik ($n_x=n_y=n_z=n_o$) kübik 43m kristal simetrisine sahip kristaline
(a) optik eksen (z-eksen) doğrultusunda uygulanan elektrik alanın $E(0,0,E_z)$ kırılma indisinde

$$n_x(E)\cong n_o-\frac{1}{2}n_o^3 r_{41}E_z$$

$$n_y(E)\cong n_o+\frac{1}{2}n_o^3 r_{41}E_z$$

$$n_z(E)=n_o$$

(b) Eğer elektrik alan E_y doğrultusunda $E(0, E_y, 0)$ olursa ne olur?
(c) Eğer elektrik alan E_y doğrultusunda $E(E_x, 0, 0)$ olursa ne olur?

Çözüm:

(a) Eşitlik x ve Çizelge 9.1 yardımı ile

$$\Delta(\frac{1}{n^2})_l = \sum_{k=1}^{3} r_l E_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{1}{n_o^2}\right](x^2 + y^2 + z^2) + 2r_{41}E_z xy = 1$$

Gerekli koordinat dönüşümleri yapılırsa (z-ekseni etrafında dönüşüme karşı gelmektedir)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{n_x^2} = \frac{1}{n_o^2} - r_{41}E_y$$

$$\frac{1}{n_y^2} = \frac{1}{n_o^2} + r_{41}E_y$$

$$\frac{1}{n_z^2} = \frac{1}{n_o^2}$$

Yukarıdaki ifadeler düzenlenirse

$$n_x(E) \cong n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{41} E_z$$

$$n_y(E) \cong n_o + \frac{1}{2} n_o^3 r_{41} E_z$$

$$n_z(E) = n_o$$

elde edilir.

Başlangıçta izotropik olan kristal ($n_x=n_y=n_z=n_o$, n_e) elektrik alanın optik eksen (z-ekseni) doğrultusunda uygulanması ile çift eksenli kristal ($n_x=n_o-\Delta$, $n_y=n_o+\Delta$, $n_z=n_o$) haline dönüştü.

(b)

$$\Delta(\frac{1}{n^2})_l = \sum_{k=1}^{3} r_l E_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{1}{n_o^2}\right](x^2 + y^2 + z^2) + 2r_{41}E_y xz = 1$$

Gerekli koordinat dönüşümleri yapılırsa (z-ekseni etrafında dönüşüme karşı gelmektedir)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{n_x^2} = \frac{1}{n_o^2} - r_{41}E_y$$

$$\frac{1}{n_y^2} = \frac{1}{n_o^2} + r_{41}E_y$$

$$\frac{1}{n_z^2} = \frac{1}{n_o^2}$$

Yukarıdaki ifadeler düzenlenirse

$$n_x(E) \square n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{41} E_y$$

$$n_y(E) = n_o$$

$$n_z(E) \square n_o + \frac{1}{2} n_o^3 r_{41} E_y$$

elde edilir.

(c) Eşitlik x ve Çizelge 9.1 yardımı ile

$$\Delta(\frac{1}{n^2})_l = \sum_{k=1}^{3} r_l E_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{1}{n_o^2}\right](x^2 + y^2 + z^2) + 2r_{41}E_x yz = 1$$

Gerekli koordinat dönüşümleri yapılırsa (z-ekseni etrafında dönüşüme karşı gelmektedir)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{n_x^2} = \frac{1}{n_o^2} - r_{41}E_y$$

$$\frac{1}{n_y^2} = \frac{1}{n_o^2} + r_{41}E_y$$

$$\frac{1}{n_z^2} = \frac{1}{n_o^2}$$

Yukarıdaki ifadeler düzenlenirse

$$n_x(E) = n_o$$

$$n_y(E) \square n_o + \frac{1}{2} n_o^3 r_{41} E_x$$

$$n_z(E) \square n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{41} E_x$$

elde edilir.

9.4 $LiNbO_3$ maddesinde z-yönünde uygulanan elektrik alandan dolayı kırılma indis elipsoidinin x-ekseni etrafında dönme açısının

$$\tan(2\theta) = \frac{2r_{42}E_y}{\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} - 2r_{22}E_y}$$

şeklinde verilebileceğini gösteriniz. Burada θ yz düzlemindeki dönme açısıdır.

Çözüm:

$$\left[\frac{1}{n_o^2}-r_{22}E_y\right]x^2+\left[\frac{1}{n_o^2}+r_{22}E_y\right]y^2+\left[\frac{1}{n_e^2}\right]z^2+2r_{51}E_y yz=1$$

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dyz=1$$

(x,y,z) yi (x_1, y_1, z_1) e dönüştürüp

$$A'x_1^2+B'y_1^2+C'z_1^2+D'y_1z_1=1$$

D'=0 koşulunu kullanarak dönüşüm elde edilebilir.

$$x=x_1$$
$$y=y_1\cos\theta-z_1\sin\theta$$
$$z=y_1\sin\theta-z_1\cos\theta$$

$$x^2=x_1^2$$
$$y^2=y_1^2\cos^2\theta-2y_1z_1\sin\theta\cos\theta+z_1^2\sin^2\theta$$
$$z^2=y_1^2\sin\theta\cos\theta+y_1z_1(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-z_1^2\sin\theta\cos\theta$$

$$A'=A$$
$$B'=B\cos^2\theta+C\sin^2\theta+D\sin\theta\cos\theta$$
$$C'=B\sin^2\theta+C\cos^2\theta-D\sin\theta\cos\theta$$
$$D'=-2B\sin\theta\cos\theta+C\sin\theta\cos\theta+D(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$$
$$\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta$$

$$D'=-B\sin 2\theta+C\sin 2\theta+D\cos 2\theta=0$$

$$\tan(2\theta)=\frac{D}{B-C}$$

$$\tan(2\theta)=\frac{2r_{42}E_y}{\frac{1}{n_o^2}-\frac{1}{n_e^2}-2r_{22}E_y}$$

Dönüş genelleştirilirse

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dyz + Exz + Fxy = 1$$

x-, y-, z-ekseni etrafında dönüş

$$\tan(2\theta_x) = \frac{D}{B-C} \qquad \tan(2\theta_y) = \frac{E}{A-C} \qquad \tan(2\theta_z) = \frac{F}{A-B}$$

9.5 (a) 4000 V'luk bir gerilimin uygulandığı 10 mm kalınlığındaki KDP'nin kırılma indisindeki değişmeyi hesaplayınız.
(b)1,06 m m dalga boyunda KDP için yarım dalga gerilimini hesaplayınız

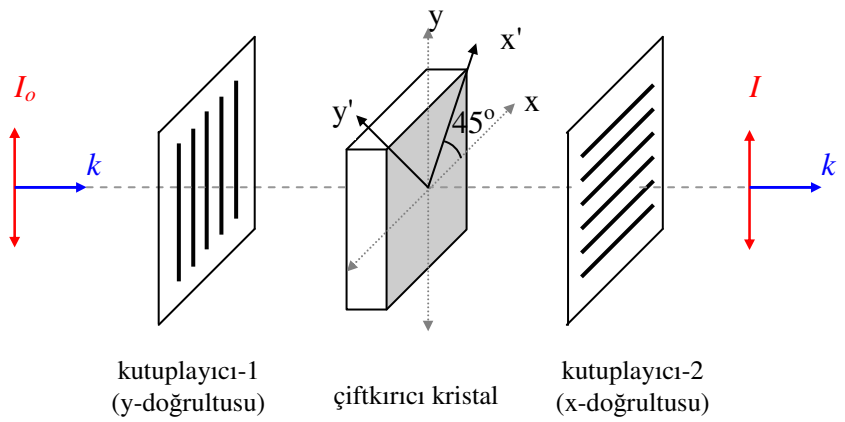
Çözüm:
(a)
r_{KD*P}=26,4 pm/V
n_o=1,51
$\Delta n = n_o - n_e = (1/2)(26{,}4\text{x}10^{-12})\text{x}(1{,}51^3)(4000\ \text{V}/10^{-2}) = 1{,}8\text{x}10^{-5}$ bulunur.

(b)

$$V_\pi = \frac{\lambda}{2rn_o^3} = \frac{1{,}06\times10^{-6}}{2.(10{,}6).(10^{-12}).(1{,}51)^3} = 14{,}5\,\text{kV}$$

9.6 Geçiş eksenleri birbirine dik olan iki doğrusal kutuplayıcı arasına hızlı ve yavaş ekseni kutuplayıcı ile 45° açı yapacak şekilde yerleştirilmiş d kalınlığındaki bir çiftkırıcı malzemeden oluşan optik düzeneğin

a) Eşdeğer Jones matrisini bulunuz
b) Birinci kutuplayıcıya y-ekseni boyunca doğrusal olarak kutuplanmış gelen ışığın çıkışdaki kutupluluk durumunu bulunuz.
c) Giren ve çıkan ışık şiddeti için bir ifade türetiniz



Çözüm:

a)

$$J_{eşdeğer} = \left(J_{yataykutuplayıcı}\right).\left(J_{çiftkırıcı-45^o}\right).\left(J_{düşeykutuplayıcı}\right)$$

$$J_{düşeykutuplayıcı} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad J_{yataykutuplayıcı} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{çiftkırıcı-45^o} = \begin{bmatrix} e^{-i\Gamma/2}\cos^2\theta + e^{i\Gamma/2}\sin^2\theta & -i\sin(\frac{\Gamma}{2})\sin(2\theta) \\ -i\sin(\frac{\Gamma}{2})\sin(2\theta) & e^{-i\Gamma/2}\sin^2\theta + e^{i\Gamma/2}\cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$J_{eşdeğer} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \cos(\frac{\Gamma}{2}) & -i\sin(\frac{\Gamma}{2}) \\ -i\sin(\frac{\Gamma}{2}) & \cos(\frac{\Gamma}{2}) \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & -i\sin(\frac{\Gamma}{2}) \\ 0 & \cos(\frac{\Gamma}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i\sin(\frac{\Gamma}{2}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\theta = 45^o$ ve trigonometrik eşitlik $\cos(x) = \dfrac{e^{-ix} + e^{ix}}{2}$ kullanılırsa geçiş ekseni xy eksen takımı ile 45° açı yapan çiftkırıcı malzemenin Jones matrisi

$$J_{çiftkırıcı-45^o} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\Gamma}{2}) & -i\sin(\frac{\Gamma}{2}) \\ -i\sin(\frac{\Gamma}{2}) & \cos(\frac{\Gamma}{2}) \end{bmatrix}$$

şeklinde basit forma indirgenebilir. Eşdeğer Jones matrisi

$$J_{eşdeğer} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \cos(\frac{\Gamma}{2}) & -i\sin(\frac{\Gamma}{2}) \\ -i\sin(\frac{\Gamma}{2}) & \cos(\frac{\Gamma}{2}) \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & -i\sin(\frac{\Gamma}{2}) \\ 0 & \cos(\frac{\Gamma}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i\sin(\frac{\Gamma}{2}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{eşdeğer} = \begin{bmatrix} 0 & -i\sin(\frac{\Gamma}{2}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$V' = J_{eşdeğer}.V = \begin{bmatrix} 0 & -i\sin(\frac{\Gamma}{2}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\sin(\frac{\Gamma}{2}) \\ 0 \end{bmatrix} = -i\begin{bmatrix} \sin(\frac{\Gamma}{2}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \frac{2\pi(n_e - n_o)d}{\lambda_o}$$

$$I = I_o\sin^2(\frac{\Gamma}{2}) = I_o\sin^2\left[\frac{\pi(n_e - n_o)d}{\lambda_o}\right] \Rightarrow \qquad \frac{I}{I_o} = \sin^2(\frac{\Gamma}{2}) = \sin^2\left[\frac{\pi(n_e - n_o)d}{\lambda_o}\right]$$