Saf Stratejilerde Evrimsel Kararlılık Bilgi Notu

Ben Polak, Econ 159a/MGT 522a

Ekim 9, 2007

Diyelim ki oyunlarda stratejiler ve davranışlar akıl yürüten insanlar tarafından seçilmiyor, ama oyuncuların genleri tarafından programlanmalarına göre seçiliyor. Yine diyelim ki başarılı olan stratejiler (daha doğrusu bu stratejiler ve davranışlara denk gelen genler) çoğalır ve daha az başarılı olanlar yok olur. Bu tip bir evrimsel sürecin hangi stratejilerin seleksiyona uğratacağı sorusunu sorabiliriz. Bu soru biyologların hayvan davranışlarını oyun teorisi kullanarak incelemelerine yol açmıştır.

Benzer bir soru piyasada rekabet eden firmalar için de geçerlidir. Muhtemelen firmaların stratejileri sofistike oyun teorisyenleri tarafından seçilmiyordur, ama bazı "pratik kurallara" bağlıdır. Bu durumda, daha kötü pratik kurallara sahip firmalar (diğer firmaların pratik kuralları veriyken) iflas edebilirler ve geride sadece daha başarılı kuralları takip eden firmaların olduğu bir popülasyon kalır. Bu tip rekabet nihayetinde sadece 'iyi yönetilen' firmaların hayatta kaldığı rasyonel seçimi taklit edebilir.

Bu haftalık tartışmamızı basitleştirilmiş bir durumla sınırlayacağız.

- Sadece simetrik 2 oyunculu oyunlara bakacağız.
- Her bir oyuncunun belirli bir strateji oynamaya programlanmış olduğu çok büyük bir popülasyon olduğunu varsayacağız. Bu yüzden popülasyonda (potansiyel olarak) karma stratejiler bulunabilir.
- Oyuncular rast gele eşleştirilirler.
- Bu eşleştirmelerde stratejiler tarafından kazanılan getirilere bakarız.
- Ortalama getirileri diğerlerinden fazla olan stratejilerin popülasyon karmasında diğerlerine nazaran çoğaldığını varsayarız. (Fark ettiyseniz bu, popülasyonun bir bütün olarak ne durumda olduğundan hiç bahsetmez.)
- Örtülü olarak sadece aseksüel üreme varsayıyoruz. Yani, aynı genlere sahip veya dominant ve edilgen genler arasındaki eşleşmelerde, hayvanlar arasındaki etkileşimleri içeren pek çok ilginç soruyu göz ardı ediyoruz.

1. Fikirler ve Örnekler

Anahtar fikir şöyle olacaktır.

Evrimsel kararlılık (oldukça esnek bir tanım). Tümünün aynı stratejiyi oynadığı büyük bir popülasyon düşünün. Eğer o stratejiye karşı farklı bir strateji oynayan herhangi küçük bir mutasyon ölüp giderse, o stratejiye evrimsel kararlı denir.

Örnek 1. Tutukluların İkilemi: tam olarak domine edilen stratejiler evrimsel kararlı (EK) değildir.

	Kooperasyon yap	Kooperasyon yapma
Kooperasyon yap	2, 2	0, 3
Kooperasyon yapma	3, 0	1, 1

Farz edelim popülasyondaki herkes kooperasyon yapmaya programlanmış olsun. Şimdi diyelim ki kooperasyon yapmamaya programlanmış küçük bir mutasyon var. O zaman popülasyon karması $(1 - \varepsilon)$ kooperasyon yapanlar ve ε kooperasyon yapmayanlardan oluşur. Her bir kooperasyon yapan ve kooperasyon yapmayan başka bir hayvan ile rast gele eşleştirilecektir, yani her birinin $(1 - \varepsilon)$ ile kooperasyon yapan ve ε ile kooperasyon yapmayan biriyle eşleşme şansı vardır. O zaman yerleşik kooperasyon yapanların ortalama getirisi şu

$$(1 - \varepsilon)\ [2] + \varepsilon\ [1]$$

ve kooperasyon yapmayan mutantların ortalama getirisi şu olur

$$(1 - \varepsilon)\ [3] + \varepsilon\ [1]$$

Açıkça belli ki, kooperasyon yapmayan mutantlar kooperasyon yapan yerlilerden (ortalama olarak) daha iyi yaparlar. Bu nedenle, %100 kooperasyon yapanlardan oluşan bir popülasyon evrimsel kararlı değildir.

Tam tersine, diyelim ki popülasyondaki herkes kooperasyon ypmamaya programlanmış olsun. Ve şimdi farz edin kooperasyon yapmaya programlanmış küçük bir mutasyon var. O zaman popülasyon karması $(1 - \varepsilon)$ kooperasyon yapmayan ve ε kooperasyon yapanlardan oluşur. Her bir kooperasyon yapan ve kooperasyon yapmayan başka bir hayvan ile rast gele eşleştirilecektir, yani her birinin $(1 - \varepsilon)$ ile kooperasyon yapmayan ve ε ile kooperasyon yapan biriyle eşleşme şansı vardır. O zaman yerleşik kooperasyon yapmayanların ortalama getirisi şudur

$$(1 - \varepsilon)\ [1] + \varepsilon\ [3]$$

ve kooperasyon yapan mutantların ortalama getirisi şudur

$$(1 - \varepsilon)\ [0] + \varepsilon\ [2]$$

Açıkça belli ki, kooperasyon yapan mutantlar kooperasyon yapmayan yerlilerden daha kötü yapıyorlar. Bu mutasyon yok olacaktır. Bu yüzden, %100 kooperasyon yapmayanlardan oluşan bir popülasyon evrimsel kararlıdır.

Bu yüzden, seminerin bu kısmındaki ilk ders şöyledir.

Ders. “Evrim berbat sonuçlanabilir”. Evrimsel kararlılıkhoş veya iyi veya etkin anlamına gelmez.

Bu örnek aynı zamanda daha genel bir fikri gösterir (ama kanıtlamaz).

Ders. Tam olarak domine edilen stratejiler evrimsel kararlı olamazlar.

Evde kendinizi buna ikna etmeye çalışın. [İpucu: tam olarak baskın bir mutant ele alın.]

Örnek 2. Evrimsel Kararlılık Nash ima eder

	a	b	c
a	2, 2	0, 0	0, 0
b	0, 0	0, 0	1, 1
c	0, 0	1, 1	0, 0

Farz edin popülasyondaki herkes c oynamaya programlanmış olsun. Strateji c domine edilmez ama yine de (c,c) bir ND değildir. Özellikle, strateji b strateji c’ye karşı, c’nin kendisine karşıolduğundan daha iyidir. Bu eğer hep-c-popülasyonunu işgal ederse b’lerin mutasyonunun yok olmayacağını gösterir. Bunu göstermek için b oynamaya programlanmış küçük bir mutasyon düşünün böylece bu durumda popülasyon karması şöyle oluşur (1 - ε)’u c oynar ve ε'nu b oynar. O zaman c oynamaya programlanmış yerlilerin ortalama getirisi şu olur

$$(1 - \varepsilon)\ [0] + \varepsilon\ [1]$$

ve mutant b’nin ortalama getirisi şu olur

$$(1 - \varepsilon)\ [1] + \varepsilon\ [0]$$

Epsilon (ε) küçük olduğundan, mutant b’ler yerli c’lerden (ortalama olarak) daha iyi yaparlar ve ölüp gitmezler. Yani, %100 c’lerden oluşan bir popülasyon evrimsel kararlı değildir. (Fark ederseniz, buradaki b mutasyonunun kendisi de evrimsel kararlı değildir -- %100 b’ler popülasyonu da c’ler tarafından işgal edilebilir.)

Bu şu genellemeyi öne sürer

Ders. Eğer ($\hat{s}$, $\hat{s}$) bir ND değilse o zaman $\hat{s}$ evrimsel kararlı değildir. Veya, daha genel olarak: eğer $\hat{s}$ evrimsel kararlıysa o zaman ($\hat{s}$, $\hat{s}$) bir ND’dir.

Evde kendinizi buna ikna etmeye çalışın. [İpucu: kârlı bir sapma olan bir stratejiyi oynamaya programlanmış bir mutasyonu ele alın.]

Bu örnekte a'nın evrimsel kararlı olduğunu kontrol etmek çok kolaydır. Fark ettiyseniz, aynı zamanda (a, a) bir ND'dir. Ama maalesef her Nash stratejisi evrimsel kararlı strateji değildir.

Örnek 3. Nash Evrimsel Kararlılık anlamına gelmez.

	a	b
a	2, 2	0, 0
b	0, 0	0, 0

Bu örnekte, hem (a, a) hem de (b, b) ND'dir. Ama b evrimsel kararlı değildir. Herkesin b oynamaya programlanmış olduğu bir popülasyon düşünün ve a oynamaya programlanmış küçük bir ε–mutasyon ele alın. O zaman yerli b'lerin ortalama getirisi şu olur

$$(1 - \varepsilon)\ [0] + \varepsilon\ [0]$$

ve mutant a'ların ortalama getirisi şu olur

$$(1 - \varepsilon)\ [0] + \varepsilon\ [2]$$

Açıkça görülüyor ki, mutasyon yerleşikten daha iyi yapar ve ölüp gitmez ve bu yüzden %100 b'lerden oluşan bir popülasyon evrimsel kararlı değildir.

Mutant a'ların neden yerli b'lerden daha iyi yaptığına dikkat edin. Yerli b'lerle eşleştiklerinde (ki bu $(1 - \varepsilon)$ şans ile gerçekleşmiştir) hem a'lar hem de b'ler aynı kazandılar: ikisi de 0 getiri aldılar. Bu oyundaki (a, a) dengesinin farklı yanı nedir? O tam ND'dir. Bu şöyle bir genellemeye yol açar.

Ders. Eğer $(\hat{s}, \hat{s})$ bir tam ND ise o zaman $\hat{s}$ evrimsel kararlıdır.

Evde kendinizi buna ikna etmeye çalışın. [İpucu: herhangi bir mutasyon ele alın ve ne zaman bir yerliyle karşılaşırsa (ki bu $(1 - \varepsilon)$ şans ile gerçekleşir) daha kötü yaptığını gözlemleyin.]

2. Formal tanımlar

Evrimsel Kararlılığa daha formal bir tanım yapmanın zamanı geldi.

Formal Tanım 1. 2 oyunculu simetrik bir oyunda, saf strateji $\hat{s}$ saf stratejilerde evrimsel kararlıdır eğer (küçük) bir mutasyon büyüklüğü $\bar{\varepsilon}$ varsa ki $\bar{\varepsilon}$'den küçük ve başka herhangi bir straeji s' oynamaya programlanmış olası her ε mutasyonu için şu doğruysa

$$(1 - \varepsilon)\ u(\hat{s}, \hat{s}) + \varepsilon\, u(\hat{s}, s') > (1 - \varepsilon)\ u(s', \hat{s}) + \varepsilon\, u(s', s')$$

Eşitsizliğin sol tarafına bakın. Bu yerleşik strateji $\hat{s}$'nin, (1 - ε) yerlinin $\hat{s}$ oynamaya programlanmış ve ε mutantın s' oynamaya programlanmış olduğu popülasyon karmasına karşı elde ettiği ortalama getiridir. Bu eşitsizliğin sağ tarafında ise aynı karmaya karşı mutant strateji s' ün ortalama getirisi vardır. **Tam** eşitsizlik bize $\hat{s}$ evrimsel kararlıysa o zaman mutasyonun tam olarak daha kötü yapması gerektiğini söyler.Tanımın $\bar{\varepsilon}$ kısmı bize büyük mutasyonlarla ilgilenmediğimizi ama sadece küçük mutasyonlarla ilgilendiğimizi söyler.

Şimdi bunun dengi başka bir tanım vereyim.

Formal Tabım 2. 2 oyunculu simetrik bir oyunda, saf strateji $\hat{s}$ saf stratejilerde evrimsel kararlıdır eğer

a) ($\hat{s}$, $\hat{s}$) bir ND ise, yani u($\hat{s}$, $\hat{s}$) ≥ u(s', $\hat{s}$) tüm s' ler için; **VE**
b) Eğer ($\hat{s}$, $\hat{s}$) bir tam ND değilse (yani u($\hat{s}$, $\hat{s}$) = u(s', $\hat{s}$) olduğu bazı s' ≠ $\hat{s}$ varsa), o zaman
u($\hat{s}$,s') > u(s',s').

Bu ikinci tanımı yukarıdaki örnekler ve derslerle karşılaştırın. Kısım (a) her evrimsel kararlı stratejinin Nash olması gerektiğini söyler. Kısım (b) iki şey söyler. Birincisi, eğer bir starteji tam Nash ise, o zaman kontrol edecek başka bir şey kalmamıştır: o evrimsel kararlıdır. Ama eğer bir starteji Nash'se ama tam Nash değilse, o zaman (ve ancak o zaman) ikinci koşulu kontrol etmemiz gerekir. İkinci koşul şunu söyler: eğer mutasyon yerleşiğe karşı, yerleşiğin kendine karşı yaptığı kadar kazanıyorsa, o zaman evrimsel kararlı olmak için yerleşik olan mutanta karşı muantın kendine karşı yaptığından tam olarak daha iyi yapmalıdır. Yukarıdaki üçüncü örnekte b stratejisinin başaramadığı buydu.

İkinci tanımın ilginç olmasının iki nedeni vardır. Birincisi, keşfedeceğimiz gibi, tamamen pratik açısından, bunu kontrol etmek birinci tanımdan daha kolaydır. İkincisi, daha entelektüel açıdan, şu çok çarpıcı bir gerçektir, modern iktisattan anahtar bir kavram olan Nash dengesi, modern biyolojiden anahtar bir kavram olan evrimsel kararlılık ile çok yakından alakalıdır. Benim gibi enteller için, bu tesadüfte hayret uyandırıcı birşeyler vardır.

Bu ders için, yularıdaki iki tanımı da bilmek zorundasınız ama isaptını bilmek zorunda değilsiniz. Bu sadece enteller içindir.

İspatın taslağı. Tanım 1'deki eşitsizliği şöyle de yazabiliriz

$$(1 - \varepsilon)\ [u(\hat{s}, \hat{s}) - u(s', \hat{s})] + \varepsilon\, [u(\hat{s},s') - u(s',s')] > 0$$

İlk ifade yerleşiğin ve mutantın yerleşiğe karşı getirilerini karşılaştırı. İkinci ifade yerleşiğin ve mutantın mutanta karşı getirirlerini karşılaştırı. Birinci ifadenin ağırlığı (1 - ε)'dur çünkü bu bir yerli ile eşleşmenin olasılığıdır. İkinci ifadenin ağırlığı ε'dur çünkü bu nir mutant ile eşleşmenin olasılığıdır. Bu eşitsizlik tüm ε'lar için tutmak zorunda olduğundan (bazı $\bar{\varepsilon}$'den küçük olarak), eğer ilk ifade kesin olarak negatif ise o zaman başımız derttedir. ε'u gelişi güzel olarak küçük tutarak, ikinci ifadenin ağırlığını göreli olarak düşürebilir ve bu nedenle sol tarafın tamamını negatif tutabiliriz. Bu yüzden ilk ifadenin zayıf olarak sıfırdan büyük olmasına ihtiyacımız vardır. Bu tam olarak tanım 2'nin (a) kısmında söylenen şeydir. Tam tersine, eğer ilk ifade tam olarak pozitif ise, işimiz bitmiştir. İlk tanım bizim ε'u (veya daha formal olarak $\bar{\varepsilon}$'u) istediğimiz kadar küçük seçmemize izin verir, yani ikinci ifadenin ağırlığı olan ε'u istediğimiz gelişi güzel olarak küçük seçebilir ve sol tarafın tamamının pozitif olduğa emin olabiliriz. Bu nedenler, eğer ilk ifade tüm s' ler için pozitifse o zaman $\hat{s}$ evrimsel kararlıdır. Bu tam olarak tam ND'nin yeterli olduğunu söylemektir. Son olarak, eğer (ve ancak eğer) ilk ifade tamolarak sıfırsa, o zman ikinci ifadeye bakıp $\hat{s}$'nın evrimsel kararlı olup olmadığnı kontrol etmemiz gerekir. Ama bu tam olarak kısım (b) nin söylediği şeydir.