14.12 Oyun Teorisi

Muhamet Yıldız

Güz 2005

Ödev 1 Çözümleri

1. Problemin çözümü

a) (on puan) Önce Alice için uygun kazançları bulalım. Soruda verilen bilgiler ışığında kazançlar alttaki tablodaki gibi olacaktır.

		Bob		
		A	M	E
Alice	P	a	b	c
	G	b	a	c

b'ye 0 değerini atayabilliriz ve ($b > c$ bilgisini kullanarak) c'ye de -1 değerini atayabiliriz. Geriye sadece a'yı çözmek kalıyor. bunu yapmak için, Alice'in Penn istasyonunu Grand Central'a ancak ve ancak $p > q - r/2$ olduğunda tercih ettiğibilgisini kullanacağız. Yani,

$$ap + 0q + 0(1 - p - q) > 0p + aq + (-1)(1 - p - q) \quad (1)$$

ancak ve ancak $p > q - (1-p-q)/2$. Bunları düzenleyerek görebiliriz ki, $a(p-q) > (-1)(1-p-q)$ ancak ve ancak $(p-q) > -(1-p-q)/2$. Yani, istiyoruz ki, $a(p-q) > (-1)(1-p-q)$ ancak ve ancak $2(p-q) > (-1)(1-p-q)$. Dolayısıyla, görüyoruz ki $a = 2$ olmalı.

Şimdiyse, Bob'un kazançlarına bakalım. Soruda verilen bilgiler ışığında kazançlar alttaki tablodaki gibi olacaktır.

			Bob	
		A	M	E
Alice	P	x	z	w
	G	z	y	w

Ayrıca, Alice'in Penn istasyonunda bekleme olasılığı 1/2'den büyükse, Bob Amtrak'ı MetroLiner'a tercih eder, yani, $x > y$. Bu bilgi ışığında, x'e 1, y'ye de 0 atayabiliriz. Şimdi, z ve w'yu çözmemiz gerekiyor. Alice'in Penn istasyonunda bekleme olasılığına s diyelim. Bob'un Amtrak'ı MetroLiner'a ancak ve ancak $s > 1/3$ olduğunda tercih etmesi, $1s + z(1-s) > zs + 0(1-s)$ ancak ve ancak $s > 1/3$ anlamına gelir. Bu $z = -1$ ise doğrulanır. Son olarak, Bob'un Amtrak'ı Ev'e ancak ve ancak $s > 2/3$ olduğunda tercih etmesi $1s + (-1)(1-s) > w$ ancak ve ancak $s > 2/3$ anlamına gelir. Bu da $w = 1/3$ anlamına gelir. Dolayısıyla, sonuç olarak, normal biçimli oyunumuz şöyledir:

			Bob	
		A	M	E
Alice	P	$2, 1$	$0, -1$	$0, 1/3$
	G	$0, -1$	$2, 0$	$-1, 1/3$

b) (beş puan) Oyuncuların kazançlarına herhangi bir afin transformasyon uyguladığımızda oyunun yapısını korumu oluruz. Alice'in kazançlarına 1 ekleyelim ve Bob'unkileri de 3 ile çarpalım. Bu durumda

			Bob	
		A	M	E
Alice	P	$3, 3$	$1, -3$	$1, 1$
	G	$1, -3$	$3, 0$	$0, 1$

olur.

c) (on puan) Soru rasyonelleştirilebilen strateji vektörlerini istiyor. E'nin M'i kesin domine ettiğini görüyoruz. M'yi oyundan çıkarttığımızda elimizde

		Bob	
		A	E
Alice	P	$3,3$	$1,1$
	G	$1,-3$	$0,1$

oyunu kalır. Bu oyunda, P G'yi kesin domine eder. G'yi çıkartıyoruz ve

		Bob	
		A	E
Alice	P	$3,3$	$1,1$

oyununu elde ediyoruz. Alice'in Penn istasyonuna gittiği ve Bob'un da A ve H arasında seçim yaptığı bu oyunda, A H'yi kesin domine eder. Bu durumda, tek olası sonuç, verili tercihler ve her iki oyuncunun da beklenen faydayı maksimize ettiği ortak bilgisi altında, Bob'un Amtrak trenine binmesi ve Alice'in de onunla Penn istasyonunda buluşmasıdır.

2. Problemin çözümü

a) (altı puan)

		2							
		Llλ	Llρ	Lrλ	Lrρ	Rlλ	Rlρ	Rrλ	Rrρ
	Axa	3,0	3,0	3,0	3,0	0,2	0,2	0,2	0,2
	Axb	3,0	3,0	3,0	3,0	0,2	0,2	0,2	0,2
	Aya	1,5	1,5	1,5	1,5	0,2	0,2	0,2	0,2
	Ayb	1,5	1,5	1,5	1,5	0,2	0,2	0,2	0,2
	Bxa	1,2	1,2	2,1	2,1	1,2	1,2	2,1	2,1
1	Bxb	1,2	1,2	2,1	2,1	1,2	1,2	2,1	2,1
	Bya	1,2	1,2	2,1	2,1	1,2	1,2	2,1	2,1
	Byb	1,2	1,2	2,1	2,1	1,2	1,2	2,1	2,1
	Cxa	1,0	2,1	1,0	2,1	1,0	2,1	1,0	2,1
	Cxb	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0
	Cya	1,0	2,1	1,0	2,1	1,0	2,1	1,0	2,1
	Cyb	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0

b) (yedi puan) 1. oyuncu için, Cxa (diğerleri arasından) Cxb ve Cyb'yi kesin domine eder. Ayrıca, Axa ve Bxa'yı 1/2 olasılıkla oynayan karma stratejisi de hem Aya'yı hem Ayb'yi kesin domine eder. 1. oyuncunun tüm diğer stratejileri 2. oyuncunun bir stratejisine en iyi tepkidir, dolayısıyla kesin domine edilemezler. Benzer şekilde, 2. oyuncunun her stratejisi 1. oyuncunun bir stratejisine en iyi tepkidir, dolayısıyla 2. oyuncunun kesin domine edilen hiçbir stratejisi yoktur. Kesin domine edilen stratejileri elediğimizde

		2							
		$Ll\lambda$	$Ll\rho$	$Lr\lambda$	$Lr\rho$	$Rl\lambda$	$Rl\rho$	$Rr\lambda$	$Rr\rho$
	Axa	3,0	3,0	3,0	3,0	0,2	0,2	0,2	0,2
	Axb	3,0	3,0	3,0	3,0	0,2	0,2	0,2	0,2
	Bxa	1,2	1,2	2,1	2,1	1,2	1,2	2,1	2,1
1	Bxb	1,2	1,2	2,1	2,1	1,2	1,2	2,1	2,1
	Bya	1,2	1,2	2,1	2,1	1,2	1,2	2,1	2,1
	Byb	1,2	1,2	2,1	2,1	1,2	1,2	2,1	2,1
	Cxa	1,0	2,1	1,0	2,1	1,0	2,1	1,0	2,1
	Cya	1,0	2,1	1,0	2,1	1,0	2,1	1,0	2,1

elde ederiz. Bu yeni 8x8'lik oyunda, $Lr\lambda$, $Ll\rho$ ve $Rr\lambda$'yı 1/2 olasılıkla karan karma strateji tarafından kesin domine edilmektedir. diğer tüm stratejiler diğer oyuncunun en az bir stratejisine en iyi tepkidir. Ikinci tur eliminizasyondan sonra

		2						
		$Ll\lambda$	$Ll\rho$	$Lr\rho$	$Rl\lambda$	$Rl\rho$	$Rr\lambda$	$Rr\rho$
	Axa	3,0	3,0	3,0	0,2	0,2	0,2	0,2
	Axb	3,0	3,0	3,0	0,2	0,2	0,2	0,2
	Bxa	1,2	1,2	2,1	1,2	1,2	2,1	2,1
1	Bxb	1,2	1,2	2,1	1,2	1,2	2,1	2,1
	Bya	1,2	1,2	2,1	1,2	1,2	2,1	2,1
	Byb	1,2	1,2	2,1	1,2	1,2	2,1	2,1
	Cxa	1,0	2,1	2,1	1,0	2,1	1,0	2,1
	Cya	1,0	2,1	2,1	1,0	2,1	1,0	2,1

elde ediyoruz. Bu 8x7'lik oyunda, her bir strateji diğer oyuncunun en az bir stratejisine en iyi tepkidir, dolayısıyla da daha fazla eliminizasyon yoktur. Bu durumda, rasyonelleştirilebilen stratejiler, 1. oyuncu için Axa,Axb,Bxa,Bxb,Byb,Cxa ve Cya, 2. oyuncu içinse, $Ll\lambda$, $Ll\rho$,$Lr\rho$,$Rl\lambda$,$Rl\rho$,$Rr\lambda$ ve$Rr\rho$'dur.

c) (beş puan) 1. oyuncunun Llλ'ya karşı en iyi tepkisi Axa ve Axb'dir. 1. oyuncunun bu stratejileri oynamaktan elde edeceği kazançlar koyu renkle alttaki taboda gösterilmiştir. Bunu 1. oyuncunun 2. oyuncunun diğer stratejilerine karşı olan en iyi tepkileri için de yaptık. Benzer şekilde 2. oyucunun da en iyi tepkilerini işaretledik. Eğer heriki kazanç koyu renkiyse, bu her iki oyuncu da birbirlerine karşı en iyi tepki oynuyor demektir (yani, Nash dengesidirler).

2

		Llλ	Llρ	Lrλ	Lrρ	Rlλ	Rlρ	Rrλ	Rrρ
	Axa	**3**,0	**3**,0	**3**,0	**3**,0	0,**2**	0,**2**	0,**2**	0,**2**
	Axb	**3**,0	**3**,0	**3**,0	**3**,0	0,**2**	0,**2**	0,**2**	0,**2**
	Aya	1,**5**	1,**5**	1,**5**	1,**5**	0,2	0,2	0,2	0,2
	Ayb	1,**5**	1,**5**	1,**5**	1,**5**	0,2	0,2	0,2	0,2
	Bxa	1,**2**	1,**2**	2,1	2,1	**1**,**2**	1,**2**	**2**,1	**2**,1
1	Bxb	1,**2**	1,**2**	2,1	2,1	**1**,**2**	1,**2**	**2**,1	**2**,1
	Bya	1,**2**	1,**2**	2,1	2,1	**1**,**2**	1,**2**	**2**,1	**2**,1
	Byb	1,**2**	1,**2**	2,1	2,1	**1**,**2**	1,**2**	**2**,1	**2**,1
	Cxa	1,0	2,**1**	1,0	2,**1**	**1**,0	**2**,**1**	1,0	**2**,**1**
	Cxb	0,**1**	0,0	0,**1**	0,0	0,**1**	0,0	0,**1**	0,0
	Cya	1,0	2,**1**	1,0	2,**1**	**1**,0	**2**,**1**	1,0	**2**,**1**
	Cyb	0,**1**	0,0	0,**1**	0,0	0,**1**	0,0	0,**1**	0,0

Bu durumda, 8 tane Nash dengesi vardır: (Bxa,Rlλ), (Bxb,Rlλ), (Bya,Rlλ), (Byb,Rlλ), (Cxa,Rlρ), (Cxa,Rrρ), (Cya,Rlρ) ve (Cya,Rrρ).

d) (yedi puan) 1. oyuncu icin, Aya, Ayb, Cxb ve Cyb, Axa tarafından domine edilmektedirler. Diğer stratejilerin hiçbiri domine edilmemektedirler (karma stratejiler tarafından bile) çünkü herbiri 2. oyuncunun bir stratejisine en iyi tepkidir ve 1. oyuncunun başka bir stratejisi yoktur ki, en iyi tepki olsun ve 2. oyuncunun herhangi bir stratejisine karşıdaha yüksek bir kazanç getirsin. 2. oyuncu için, Rlρ, Rrρ'yi domine eder, Rlλ, Rrλ'yı domine eder, Llλ, Lrλ'yı domine eder ve Llρ da Lrρ'yu domine eder. Ancak Rrρ, Rrλ,Llλ ve Llρ domine edilmezler (buna kandinizi inandırabilmelisiniz). Dolayısıyla, bir tur eliminizasyon sonrasında,

		2			
		Llλ	Llρ	Rlλ	Rlρ
	Axa	3,0	3,0	0,2	0,2
	Axb	3,0	3,0	0,2	0,2
	Bxa	1,2	1,2	1,2	1,2
1	Bxb	1,2	1,2	1,2	1,2
	Bya	1,2	1,2	1,2	1,2
	Byb	1,2	1,2	1,2	1,2
	Cxa	1,0	2,1	1,0	2,1
	Cya	1,0	2,1	1,0	2,1

oyunu kalır elimizde. Şimdi, 1.oyuncu için, Cxa, Bxa,Bxb,Bya ve Byb'yi domine eder. Axa, Axb, Cxa ve Cya domine edilmezler. 2. oyuncu icin, Rlρ dominant bir stratejidir. Dolayısıyla, ikinci tur elemeden sonra,

		2
		Rlρ
	Axa	0,2
1	Axb	0,2
	Cxa	2,1
	Cya	2,1

elde ederiz. Bu oyunda, Cxa, Axa ve Axb'yi domine eder. Üçüncü turdan sonra ise

		2
		Rlρ
1	Cxa	2,1
	Cya	2,1

elde ederiz. Burdan sonra başka eleme yapamayacağımız açık olmalı. dolayısıyla, domine edilen stratejilerin yinelemeli eleme yolundan sağ çıkanlar, 1. oyuncu için Cxa ve Cya, 2. oyuncu içinse, Rlρ'dur.

3. Problemin çözümü

a) (10 puan) i'nin kazancı

$$x_i - x_i t(x_1, .., x_n) \tag{2}$$

dır. Diğer oyuncuların seçimleri veriliyken, $\{x_j^*\}_{j \neq i}$, i oyuncusunun optimal stratejisi öyle bir x_i seçmektir ki,

$$1 - x_i \frac{\partial t}{\partial x_i} - t(x_1^*, x_2^*, ..x_i, .., x_n^*) = 0 \Rightarrow x_i = 1 - t(x_1^*, x_2^*, .., x_i, .., x_n^*) \tag{3}$$

olsun.

Tüm öğrenciler üzerinden toplama yaptığımızda,

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* = t(x_1^*, ..., x_n^*) = n - nt(x_1^*, ..., x_n^*) \Rightarrow t(x_1^*, ..., x_n^*) = \frac{n}{n+1} \tag{4}$$

elde ederiz. (1)'deki $t(x_1^*, ..., x_2^*)$'yi (2)'yi kullanarak yazdığımızda,

$$x_i = \frac{1}{n+1} \tag{5}$$

elde ederiz. dolayısıyla, tek olan Nash dengesinde, her bir öğrenci $\frac{1}{n+1}$ büyüklüğünde bir veri gönderip, $\frac{1}{(n+1)^2}$'lik bir kazanç sağlar.

b) (15 puan)

1. Öğrenci i'nin kazancı

$$M + x_i - x_i t(x_1, .., x_n) - px_i \tag{6}$$

idir. Birinci kısımdaki gibi ilerleyeceğiz. Diğer oyuncuların seçimleri veriliyken, $\{x_j^*\}_{j \neq i}$, i oyuncusunun optimal stratejisi öyle bir x_i seçmektir ki,

$$1 - x_i \frac{\partial t}{\partial x_i} - t(x_1^*, x_2^*, ..x_i, .., x_n^*) - p = 0 \Rightarrow x_i = 1 - t(x_1^*, x_2^*, .., x_i, .., x_n^*) - p \tag{7}$$

olsun.

Tüm öğrenciler üzerinden toplama yaptığımızda,

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* = t(x_1^*, ..., x_n^*) = n - nt(x_1^*, ..., x_n^*) - np \Rightarrow t(x_1^*, ..., x_n^*) = \frac{n(1-p)}{n+1} \Rightarrow x_i^* = 1 - \frac{n(1-p)}{n+1} - p = \frac{1-p}{n+1} \tag{8}$$

elde ederiz. Dolayısıyla, M ve p veriliyken, Nash dengesinde, her oyuncu $\frac{1-p}{n+1}$ birim veri göndermeyi seçer ve $M + [\frac{1-p}{n+1}]^2$ kadar bir kazanç sağlar.

2. Eğer her oyuncu $\frac{1-p}{n+1}$ birim veri gönderirse, p fiyatında, bu $\frac{np(1-p)}{n+1}$'lik bir ciro getirir. Sıfır kazanç için

$$nM = \frac{np(1-p)}{n+1} \Rightarrow M = \frac{p(1-p)}{n+1} \tag{9}$$

gerekir. Her oyuncunun edineceği kazanç

$$\frac{p(1-p)}{n+1} + [\frac{1-p}{n+1}]^2 = \frac{1}{(n+1)^2}(1-p)(np+1) \tag{10}$$

dir, bu da maksimumunu $p = \frac{n-1}{2n}$ ve $M = \frac{n-1}{4n^2}$'de sağlar. Bu p ve M değerleri $\frac{1}{4n}$'lik bir toplam fayda getirir.

3. Eğer $n = 1$ ise, p ve M, (b)2'de sıfır değerlerini alır ve toplam fayda da heriki programda da1/4 olur. Bunun sebebi, sadece tek bir oyuncu varken, veri ağında bir negatif dışsallığa mahal yoktur ve dolayısıyla, veri iletimini paralı yapmak toplam faydayıyı arttırmaz. n'nin daha büyük değerleri için, ikinci program her zaman daha iyidir - öğrencilerden veri transferi için ücret alarak, ne kadar veri yollayacaklarına karar verirken mevcut negatif dışsallığı da hesaba katmalarını garanti etmiş oluruz.

4. Problemin çözümü

Şimdi yapacağımız, genelleştirilmiş n-oyunculu durum için bir ispat. t_i, i adayının gerçek tercihleri olsun. Diğer adaylar için bir bildirilmiş tercihler kümesi, $\{s_j\}_{j \neq i}$, sabitleyelim (bunlar doğru tercihleri söyleyedebilir söylemeyedebilir). μ_M soruda anlatılan algoritma (bundan sonra bu algoritmaya Gale-Shapley algoritması diyeceğiz) bildirilen tercihler, $(t_i, \{s_j\}_{j \neq i})$ icin kullanıldığında ortaya çıkan eşleşme olsun. Göstereceğiz ki, eğer başka bir μ eşleşmesi varsa ve i adayı μ eşleşmesi altındaki pozisyonunu μ_M altındakine tercih ediyorsa, o zaman μ eşleşmesi 'bloke' edilir; yani, μ altında eşleştirilmemiş öyle bir aday (i adayından farklı olarak) ve öyle bir pozisyon vardır ki, (adayların bildirdikleri tercihlere göre) birbirleriyle eşleşmeyi μ altındaki eşlerine tercih ederler. Gale-Shapley makalesinde, gösteriyorlar ki, buldukları eşleştirme algoritması her zaman 'sabit' bir eşleşme sonucunu doğurur (bildirilen tercihler için); yani, bloke eden bir ikili yoktur. Dolayısıyla eğer i adayı μ'yu μ_M'ye tercih ediyorsa, Gale-Shapley algoritmasını i adayının bildirdiği herhangi bir tercihler, s_i, için kullanarak μ'yu elde etmek mümkün değildir.

$(t_i, \{s_j\}_{j \neq i})$ tercihleri altında μ eşleşmesinin bloke edileceğini göstermek için: M' μ'yu μ_M'e tercih eden adaylar kümesi olsun; varsayım gereği M' i adayını kapsar ama tbi başka adayları da kapsayabilir. Sırasıyla, $\mu(M')$ ve $\mu_M(M')$, M' kümesindeki adayların μ ve μ_M altında eşleştirildikleri pzisyonlar kümeleri olsun. Ayrı ayrı düşünmemiz gereken iki durum var (bundan sonrası Roth ve Sotomayer'in 'Çift taraflı eşleştirme' kitabındaki 'Blocking Lemma' 'ya dayanmaktadır).

- Durum 1: $\mu(M') \neq \mu_M(M')$. $\mu(M') - \mu_M(M')$ kümesinden bir ω seçelim. Yani, ω M' kümesinden bir adaya μ altında eşleştirilmiş ama μ_M altında eşleştirilmemiş bir pozisyondur. Diyelimki, $\omega = \mu(m')$. $m' \in M'$ olduğundan, m' ω'yı μ_M altındaki eşine tercih eder. O zaman, m', μ_M altında ω'ya başvurup reddedilmiş olmalı; dolayısıyla, ω, $\mu_M(\omega) = m$'i m''e tercih ediyor olmalı. $\omega \notin \mu_M(M')$ olduğundan, $m \notin M'$ idir. Dolayısıyla, m, ω'yı $\mu(m)$'e tercih eder. Yani, (m, ω), μ'yu bloke eder.

- Durum 2: $\mu(M') = \mu_M(M') = W'$. Diyelim ki, ω W' içindeki, μ_M altında M' kümesinden bir adaydan başvuru alan son pozisyon olsun. W''deki tüm pozisyonlar M''deki tüm adayları reddettikleri için, ω bu başvuruyu aldığında, bir m başvurusuna nişanlanmış olmalıdır. O zaman, iddia ediyoruz ki (m, ω) bloke eden bir ikilidir. Ilk olarak, $m \notin M'$; aksi takdirde, ω tarafından reddedildikten sonra W''daki başka bir pozisyona başvururdu ve bu ω'nın böyle bir başvuruyu alacak W''daki son pozisyon olma varsayımıyla çelişir. Dolayısıyla, m μ altında μ_M altında olduğundan daha kötü bir durumda olur. Ayrıca, m, ω'ya, $\mu_M(m)$'le eşleşmeden önce başvurduğu (ve reddedildiği) için, ω'yı $\mu_M(m)$'e tercih eder. Dolayısıyla, m aynı zamanda ω'yı $\mu(m)$'e tercih eder. Diğer taraftan, m ω tarafından reddedilen son adaydı; dolayısıyla, $\mu(\omega)$'yı m'yi reddetmeden önce reddetmiş olmalıdır. Dolayısıyla, m'yi $\mu(\omega)$'ya tercih eder. Bu durumda, (m, ω) μ'yu iddia edildiği gibi bloke eder.