14.12 Oyun Teorisi

Muhamet Yıldız

Güz 2005

Ödev 2 Çözümleri

Soru 1 (30)

Kolayca görebiliriz ki, saf strateji Nash dengesi yoktur. Her kutucuk (strateji ikilisi) için her zaman en az bir oyuncu için daha iyi bir başka strateji bulabiliriz. dolayısıyla saf strateji Nash dengesi olmadığı sonucuna varıyoruz.

Tüm karma strateji Nash dengelerini bulmak icin, oyunu tüm kesin domine edilen stratejilerden arındırmalıyız, çünkü bir dengede kesin domine edilen stratejiler hiçbir zaman pozitif bir olasilık almazlar.

Kesin domine edilen strateji var mı bir görmeye çalışalım: 1. oyuncu için, B, L'ye bir en iyi tepkidir (ET). Benzer şekilde, C M'ye, A da R'ye birer ETdir. Dolayısıyla, ilk turda 1. oyuncu için kesin domine edilen bir strateji yoktur.

2. oyuncu için, L A'ya ETdir. Benzer şekilde, M B'ye, L de C'ye ETdir. Dolayısıyla tek kesin domine edilebilecek olan strateji R'dir. Bakalım L ve M'nin R'yi domine edecek herhangi bir kombinasyonu var m. L'nin olasılığına p dersek, L ve M kombinasyonu alttaki tüm eşitsizlikleri sağlamalı.

$$p * 1 + (1-p) * 0 > 0$$

$$p * 1 + (1-p) * 2 > 1$$

$$p * 2 + (1-p) * 1 > 1$$

Bu eşitsizlikler sırasıyla alttaki eşitsizliklere indirgenebilir:

$$p > 0, 1 > p, p > 0$$

Sonuç olarak, herhangi bir L ve M kombinasyonu 0¡p¡1 iken R oynamaktan daha iyidir. Dolayısıyla, R ilk turda kesin domine edilen bir stratejidir (Sıralı oynadıklarını düşünmeyin. Sadece bu akıl yürütmeyi oyunu eş zamanlı oymadan önce yapıyorlar). 1. oyuncu, 2. oyuncunun R oynamayacağını bildiğinden, A stratejisini eler çünkü indirgenmiş oyunda (bu oyun 2. oyuncu için R'yi içermez) A hem B hem de C tarafından kesin domine edilir. Şimdi, alttaki oyun kalır elimizde

	L	M
B	2,1	1,2
C	1,2	2,1

Diyelimki, 1. oyuncu μ olasılıkla B oynasın ve 2. oyuncu da λ olasılıkla L oynasın. Bu durumda, karma denge alttaki eşitsizlikleri sağlamalı

$$\mu * 1 + (1 - \mu) * 2 = \mu * 2 + (1 - \mu) * 1$$

$$\lambda * 2 + (1 - \lambda) * a = \lambda * 1 + (1 - \mu) * 2$$

Dolayısıyla, çözüm

$$\mu = \lambda = 1/2$$

idir.

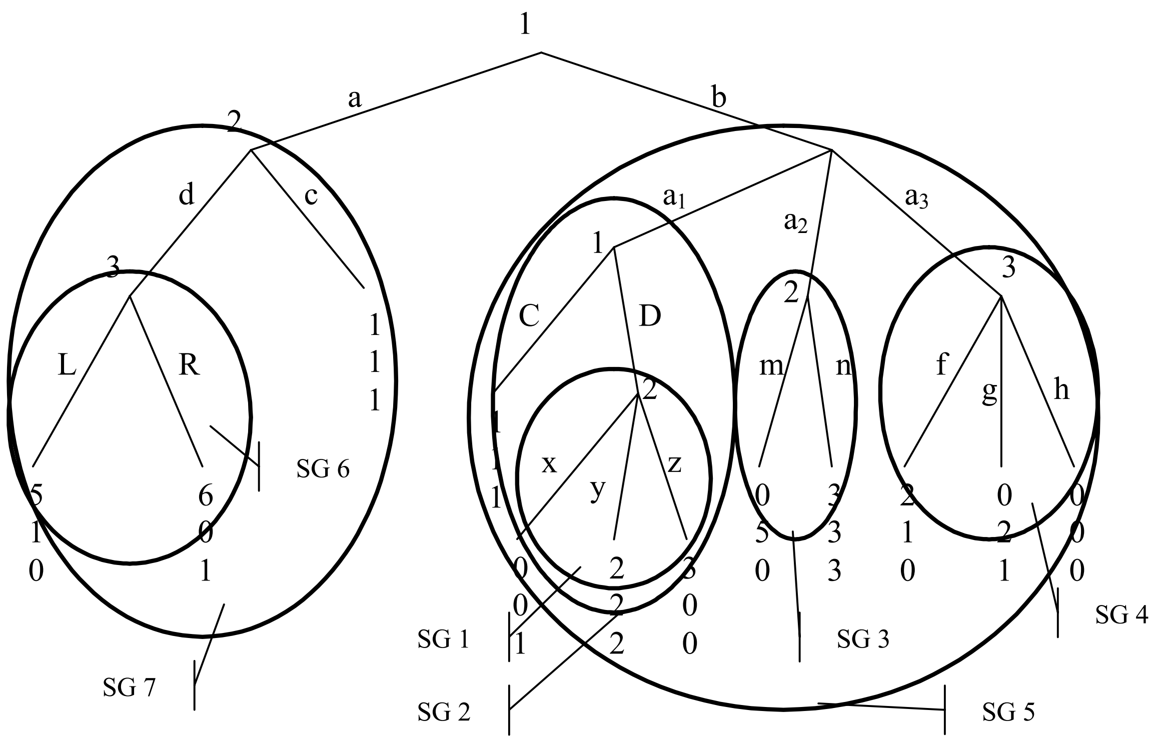
Bu da demktir ki, tek Nash dengesi

$$NE = [(1/2)B + (1/2)C, (1/2)L + (1/2)M]$$

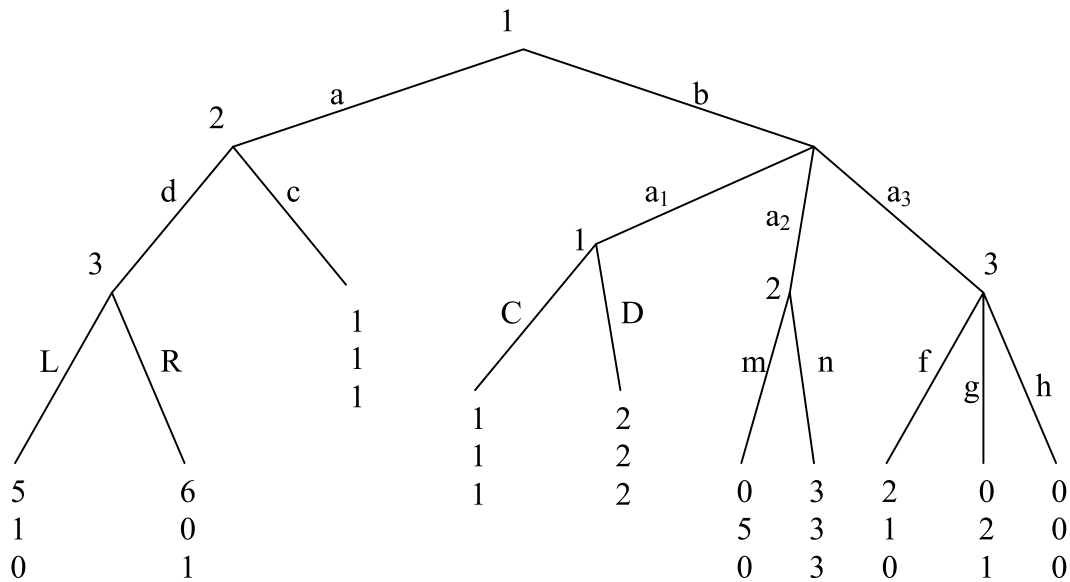
idir. Hatırlayınız ki, bir Nash dengesi stratejiler dengesidir, kazançlar DEĞIL.

Notlandırma ile ilgili olarak: p için tek bir örnek vermek yeterlidir. Buradaki detaylar sadece eğitici amaçla verilmiştir.

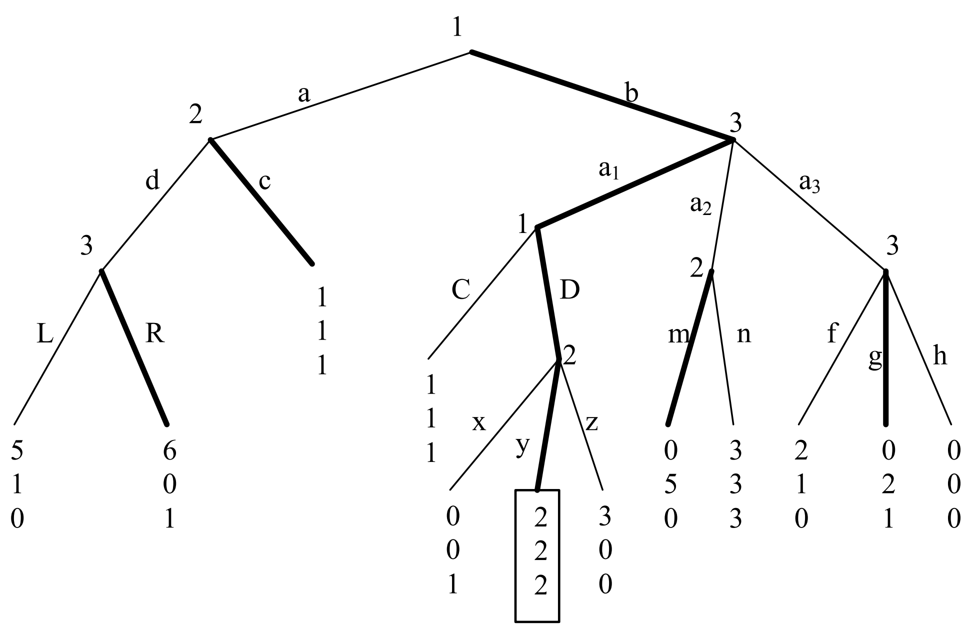
Soru 2 (30)



En küçük alt-oyundan (SG1) başlayarak, geriye doğru tümevarımla çözeceğiz. Yukarıdaki resimde tüm has alt-oyunlar bir çembere alınmıştır. Bir alt-oyunu çözdüğümüzde, o alt-oyun sıralırasyonel kararın kazancıyla yer değiştirilir. Yer değiştirme yöntemini göstermek için, ilk alt-oyunu çözdükten sonra oyun ağacının alttaki resimdeki gibi olduğunu görebiliriz.



Her bir noktadaki sıralı rasyonel kararlar alttaki resimde gösterilmiştir.



Sonuç olarak, yukarıdaki oyunun tek alt-oyun tam dengesi

$$SPE = (bDicmy, a_1Rg)$$

idir, öyleki, denge kazançları da

$$(2, 2, 2)$$

idir.

Soru 2 (30)

Uyarı: soruda sorulduğu üzere, bu çözüm her hayatta kalan yarışmacı kombinasyonu için kimin eleneceğini gösteriyor ancak stratejileri ta olarak belirtmiyor. Aklımızdan çıkartmayalım ki, ikinci turdaki birisinin davranışını veren stratejinin bir parçası potensiyel olarak sadece ilk turda kimin elendiğine değil aynı zamanda da kimin kim için oy kullandığına da bağlı olabilir. Ayrıca, belirtelim ki, bu çözüm oyuncuların kendileri için oy kullanamayacaklarını varsaymaktadır, ki buna izin verilseydi bile sonuç ilginç bir şekilde değişmeyecekti.

Iki tane incelememiz gereken tur var ve ilk olarak ikinci tura bakmakla başlayalım. Diyelim ki, kalan oyuncular i, j ve k olsun. Kalan üç kisiden en yüksek değeri olan oyuncu oylanıp elenecek. Bunu görmek için, öncelikle bir ön iddiada bulunalım: Oyuncu i için en kötü sonuç kendisinin elenmesi ve en iyi sonuç ise j ve k oyuncularından en yüksek değerli oyuncunun elenmesidir. Bunun ilk kısmının ispatı oldukça açıktır. Ikinci kısmının ispatını görmek için, ilk turda elenen oyuncuya l oyuncusu diyelim ve belirtelim ki

$$\frac{v_i}{v_i + v_j}(v_i+v_j+v_k+v_l+v_i+v_j+v_k+v_i+v_j) > \frac{v_i}{v_i + v_k}(v_i+v_j+v_k+v_l+v_i+v_j+v_k+v_i+v_k)$$

ancak ve ancak

$$(v_i+v_k)(v_i+v_j+v_k+v_l+v_i+v_j+v_k+v_i+v_j) > (v_i+v_j)(v_i+v_j+v_k+v_l+v_i+v_j+v_k+v_i+v_k)$$

ancak ve ancak

$$v_iv_j+v_k(v_i+v_j+v_k+v_l+v_i+v_j+v_k+v_i+v_j) > v_iv_k+v_j(v_i+v_j+v_k+v_l+v_i+v_j+v_k+v_i+v_k)$$

ancak ve ancak

$$v_iv_j+v_kv_i+v_kv_j+v_k(v_i+v_j+v_k+v_l+v_i+v_j+v_k) > v_iv_k+v_jv_i+v_jv_k+v_j(v_i+v_j+v_k+v_l+v_i+v_j+v_k)$$

ancak ve ancak

$$v_k(v_i + v_j + v_k + v_l + v_i + v_j + v_k) > v_j(v_i + v_j + v_k + v_l + v_i + v_j + v_k)$$

ancak ve ancak

$$v_k > v_j.$$

Dolayısıyla, bir oyuncu lotaryaya daha küçük değerli bir oyuncuya karşı girmekten daha büyük değerli bir oyuncuya karşı girmekten daha fazla kazanç sağlar. Ancak, stratejik oylama yüzünden, burada durmamalıyız.

Ik turdan hayatta kalan oyuncuların 1,2 ve 3 olduğu duruma bakalım. (Diğer durumlar, 1,2 ve 4'ün hayatta kaldığı; 1,3 ve 4'ün hayatta kaldığı ve 2,3 ve 4'ün hayatta kaldığı durumlardır. Bu durumlarda en yüksek değerli yarışmacının elendiğini gösteren argüman 1,2 ve 3'ün hayatta kaldığı durum için de aynıdır. Tek yapmamız gereken numaralarıdeğiştirmektir.) 3. oyuncu en son oynar. Dört tane bakmamız gereken durum vardır:

1. Hem 1 hem 2, 3. oyuncu için oy kullanırlar.
2. 1 için bir oy, 2 için bir oy vardır.
3. 1 için bir oy, 3 için bir oy vardır.
4. 2 için bir oy, 3 için bir oy vardır.

1. durumda, 3. oyuncunun ne yaptığı önemsizdir. 2. durumda 3. oyuncu 1. oyuncuyu elemek üzere oy kullanmalıdır (bu yukarıdaki argümanımızdan gelir.) 3. durumda, 3. oyuncu 1. oyuncuyu elemek üzere oy kullanmalıdır, çünkü öyle yaparak kendisi için en iyi sonuca ulaşır (2. oyuncuya karşı lotaryaya girerek), 2. oyuncu için oy kullanmak 1/3'lük bir şansla en iyi sonuç ama 1/3 olasılıkla en az tercih edeceği sonuç olan lotaryada 1. oyuncuya karşı olmak ve 1/3 olasılıkla da elenmek anlamına gelir. 4. durum gerçekleşmez. 4. durumda 1. oyuncu 2 için, 2. oyuncu 3 için oy kullandı demektir. Ancak 1. oyuncu eğer 2. oyuncu için oy kullandıysa, o zaman 2. oyuncu 1. oyuncu için oy kullanmalıdır, çünkü o zaman kendisi için en iyi sonuca ulaşir (3. oyuncu o durumda 1. oyuncu için oy kullanır); 3. oyuncu için oy kullanmak ise (3'un nasıl oy kullandığına bağlı olarak) ya her oyuncu için bir oy (2.

oyuncu için daha az tercih edilir bir sonuç) ya da 2. oyuncu 3. oyuncunun oyuyla elenir (yine 2. oyuncu için daha az tercih edilen bir sonuç).

Şimdi geriye doğru giderek 2. oyuncuya bakalım. Iki durum söz konusu:

1. 1. oyuncu 2 için oy kullandı.
2. 1. oyuncu 3 için oy kullandı.

Durum 1 yukarıda açıklanmıştır ve bu senaryoda 2. oyuncunun 1. oyuncu için oy kullanması gerektiği gösterilmiştir. 2. durumda ise, 2. oyuncu yine 1. oyuncu için oy kullanmalıdır çünkü bu 2. oyuncu için en iyi sonucu verecektir (çünkü o zaman 3. oyuncu 1. oyuncu için oy kullanacaktır ve 2. oyuncu da lotaryaya 3. oyuncuya karşı girecektir), diğer tarafından, 3. oyuncu için oy kullanmak ise lotaryaya 1. oyuncuya karşı girmek anlamına gelir (3'e karşı olmaya göre daha az tercih edeceği bir sonuç).

Daha da geriye gidersek ve 1. oyuncuya bakarsak, görürüz ki, 1. oyuncunun kim için oy kullandığı önemsizdir çünkü her durumda elenecektir.

Şimdi ilk tura bakalım. En düşük değerli iki hayatta kalan yarışmacı oyunun en sonunda final lotaryaya katılacak olanlardır. Bu noktada, anlıyoruz ki, ilk turu geçen ve final lotaryasına katılacak olan bir oyuncu ilk turu geçen ve final lotaryaya girecek olan oyuncunun yüksek değerli olmasındanda düşük değerli olmasını tercih eder. Bunu görmek için, kendimizi oyuncu i'nin yerine koyalım ve j ve k'den hangisinin hayatta kalmasını ve sonunda lotaryada karşımıza çıkmasını tercih edeceğimize bakalım. (Eğer her iki j ve k oyuncularıda 2. tura kalırlarsa, final lotaryasında düşük değerli bir oyuncuyla oynamanın daha iyi olduğunu gösteren çalışma yine yukarıdakinin aynısıdır. Bu çalışma, bu oyunculardan birinin ilk turda elenmesi durumunda da geçerlidir.) Elimizde

$$\frac{v_i}{v_i+v_j}(v_i{+}v_j{+}v_k{+}v_l{+}v_i{+}v_j{+}v_l{+}v_i{+}v_j) > \frac{v_i}{v_i+v_k}(v_i{+}v_j{+}v_k{+}v_l{+}v_i{+}v_l{+}v_k{+}v_i{+}v_k)$$

ancak ve ancak

$$(v_i{+}v_k)(v_i{+}v_j{+}v_k{+}v_l{+}v_i{+}v_j{+}v_l{+}v_i{+}v_j) > (v_i{+}v_j)(v_i{+}v_j{+}v_k{+}v_l{+}v_i{+}v_l{+}v_k{+}v_i{+}v_k)$$

ancak ve ancak

$$2v_iv_j{+}v_k(v_i{+}v_j{+}v_k{+}v_l{+}v_i{+}v_j{+}v_l{+}v_i{+}v_j) > 2v_iv_k{+}v_j(v_i{+}v_j{+}v_k{+}v_l{+}v_i{+}v_j{+}v_k{+}v_i{+}v_k)$$

ancak ve ancak

$$2v_iv_j+2v_kv_j+v_k(v_i+v_j+v_k+v_l+v_i+v_l+v_i) > 2v_iv_k+2v_jv_k+v_j(v_i+v_j+v_k+v_l+v_i+v_l+v_i)$$

ancak ve ancak

$$-2v_iv_k+v_k(v_i+v_j+v_k+v_l+v_i+v_l+v_i) > -2v_iv_j+v_j(v_i+v_j+v_k+v_l+v_i+v_l+v_i)$$

ancak ve ancak

$$v_k(v_i+v_j+v_k+v_l+v_i+v_l-v_i) > v_j(v_i+v_j+v_k+v_l+v_i+v_l-v_i)$$

$$v_k > v_j.$$

var.

Farkediniz ki, 3 ve 4. oyuncular, ilk turda birbirlerini eleme veya 2. oyuncuyu ilk turda eleme seçimi verildiğinde, 2. oyuncuyu ilk turda elemeyi tercih ederler ve nihayetinde lotaryayı 2. oyuncudansa birbirlerine karşı tercih ederler. Ancak, aynı zamanda bu oyuncular 2. oyuncudansa 1. oyuncuyu ikinci tura kadar oyunda tutmayı tercih ederler, cünkü eğer 3. ve 4. oyuncular sonunda birbirlerine karşı lotarya oynayacaklarını biliyorlarsa, ortak hesabın miktarınıyüksek tutmak için oyunda 2. oyuncudansa 1. oyuncuyu tutarlardı. Ayrıca, 1. oyuncu ilk turdaki sonuçlar arasında kayıtsızdır, çünkü ne olursa olsun final lotaryasına giremeyecektir. Dolayısıyla, 1. oyuncunun stratejisini değiştirerek hangi denelerin sıralı rasyonellikle tutarlı olduğnu görebiliriz. Yine hatırlayınız ki, 3. ve 4. oyuncuların çıkarları ortaktır, öyle ki, son lotaryayı birbirlerine karşı oynamak ve ilk turda 2. oyuncuyu elemek isterler; ikisinin toplam iki oyu en azından bir eşit oy durumunu garanti eder.

Eğer 1. oyuncu 2. oyuncuyu elemek üzere oy kullanırsa, o zaman 3. ve 4. oyuncular istedikleri en iyi sonucu almış olacaklardır, 2. oyuncu oyunu kime kullanırsa kullansın. Eğer, 1. oyuncu 3. oyuncuyu elemek üzere kullanırsa oyunu, o zaman 2. oyuncu da 3. oyuncuyu elemek için oyunu kullanmalıdır (ve 3. ve 4. oyuncular da oylarını 2. oyuncuyu elemek için kullanmalılar) çünkü, aksi durumda, 3. ve 4. oyuncular 2. oyuncuyu elemek için yeterli oy sayısına ulaşacaklar; 3. oyuncu için ikinci bir oy sağlayarak, 2. oyuncu ikinci tura geçmek icin %50'lik bir şans yakalar. Benzer şekilde, eğer 1. oyuncu 4. oyuncuyu elemek için oy kullanırsa, o zaman 2.

oyuncu 4. oyuncuyu elemek için oyunu kullanmalıdır (ve 3. ve 4. oyuncular 2. oyuncuyu elemek için oylarını kullanmalılar).

Dolayısıyla, nihayetinde, oyunun birkaç değişik sonucu vardır:

1. 2. oyuncu ilk turda elenir ve 3. ve 4. oyuncular final lotaryasını birbirleriyle oynarlar.

2. Ilk turda 2. ve 3. oyuncular için eşit oy çıkar ve rastgele biri seçilir, seçilen final lotaryasını 4. oyuncuyla oynar.

3. Ilk turda 2. ve 4. oyuncular için eşit oy çıkar ve rastgele biri seçilir, seçilen final lotaryasını 3. oyuncuyla oynar.

Ama farkedelim ki, ilk turda kim elenirse elensin, kalanlar arasındaki en yüksek değere sahip yarışmacı ikinci turda elenecektir.