14.12 Oyun Teorisi

Muhamet Yıldız

Güz 2005

Ödev 3 Çözümleri

Soru 1

Bu oyunun iki alt-oyunu var. Bir tanesi oyunun kendisi, diğeri ise her iki oyuncu da Eve dedikten sonra gelen oyun. Bu ikinci alt-oyunda, 3 tane Nash dengesi (ND) var: (Y,Y), (T,T) ve bir karma strateji dengesi. Karma dengeyi şöyle hesaplıyoruz: D?yelim ki, 1. oyuncu μ olasılıkla Y oynasın ve 2. oyuncu da λ olasılıkla Y oynasın. Bu durumda karma denge şu koşulları sağlamalı:

2. oyuncu Y ve T arasında kayıtsızdır

$\Leftrightarrow \mu * 100 + (1 - \mu) * 0 = \mu * 60 + (1 - \mu) * 60$

$\Leftrightarrow \mu = 0.6$

1. oyuncu Y ve T arasında kayıtsızdır

$\Leftrightarrow \lambda * 100 + (1 - \lambda) * 0 = \lambda * 60 + (1 - \lambda) * 60$

$\Leftrightarrow \lambda = 0.6$

Dolayısıyla çözüm $\mu = \lambda = 0.6$'dır.

Bu da demektir ki, karma strateji Nash dengesi $(0.6Y + 0.4T, 0.6Y + 0.4T)$'dir.

Alt-oyun tam dengeyi (ATD) hesaplamak için, strateji vektörünün her alt-oyunda bir Nash dengesi olup olmadığını kontrol etmemiz gerekir. Dolayısıyla, bir ATD elde etmek için, varsaymalıyız ki, kücük alt-oyundaki sonuç bu ND'lerden biri olmalı. Her iki oyuncu da küçük alt-oyunda Y seçerse, indirgenmiş oyun

	E	H
E	100,100	80,80
H	80,80	80,80

şeklindedir.

Bu durumda iki tip ND vardır, (E,E) ve (H,H). Dolayısıyla, ATD'ler (EY,EY) ve (HY,HY)'dir.

Her iki oyuncu da küçük alt-oyunda T seçerlerse, indirgenmiş oyun

	E	H
E	60,60	80,80
H	80,80	80,80

şeklindedir.

Bu durumda, 3 tane saf ND var: (E,H), (H,E) ve (H,H). 2 tane de karma ND var: (H,pE+$(1-p)$H) ve (pE+$(1-p)$H,H), $0 \leq p \leq 1$. Dolayısıyla, ATD'ler (ET,HT), (HT,ET), (HT,HT), (HT,(pE+$(1-p)$H)T) ve ((pE+$(1-p)$H)T,HT)'dir. Küçük alt-oyunda her iki oyuncu da karma ND'yi oynarlarsa, o zaman indirgenmiş oyun bir önceki durumla aynıdır. Dolayısıyla, oyunun ATD'leri (ET,HT), (HT,ET), (HT,HT), (HT,(pE+$(1-p)$H)T) ve ((pE+$(1-p)$H)T,HT)'dir.

Soru 2

a) i oyuncusunun oyun t periyoduna vardığındaki devam değeri V_t^i olsun. Açıktır ki, son periyotta, $t = 3n$, 2. oyuncu (0,1) teklifini verecektir, dolayısıyla $V_{3n}^1 = 0$ ve $V_{3n}^2 = 1$ olacaktır.

$t = 3n - 3k + 3$'üncü periyotta, ($k = 1, 2, ..., n-1$), 2. oyuncu teklif yapan oyuncudur ve $(\delta V_{3n-3k+4}^1, 1 - \delta V_{3n-3k+4}^1)$ teklifini yapar ve 1. oyuncu bunu kabul eder.

$t = 3n - 3k + 2$'inci periyotta, 1. oyuncu teklif yapan oyuncudur ve $(1 - \delta V_{3n-3k+3}^2, \delta V_{3n-3k+3}^2)$ teklifini yapar.

$t = 3n - 3k + 1$'inci periyotta, 1. oyuncu $(1 - \delta V_{3n-3k+2}^2, \delta V_{3n-3k+2}^2)$ teklifini yapar.

$t = 3n - 3k$'inci periyotta, 2. oyuncu $(\delta V_{3n-3k+1}^1, 1 - \delta V_{3n-3k+1}^1)$ teklifini yapar.

Dolayısıyla:

$$V_{3n-3k}^2 = 1 - \delta V_{3n-3k+1}^1 = 1 - \delta(1 - \delta V_{3n-3k+2}^2) \Leftrightarrow V_{3n-3k}^2 = 1 - \delta + \delta^2 V_{3n-3k+2}^2$$

$$\Leftrightarrow V_{3n-3k}^2 = 1 - \delta + \delta^2(\delta * V_{3n-3k+3}^2 \Leftrightarrow V_{3n-3k}^2 = 1 - \delta + \delta^3 * V_{3n-3k+3}^2$$

$$V^2_{3n-3k} = 1-\delta+\delta^3(1-\delta+\delta^3 V^2_{3n-3k+6} \Leftrightarrow V^2_{3n-3k} = 1-\delta+\delta^3-\delta^4+\delta^6 V^2_{3n-3k+6}$$

$$V^2_{3n-3k} = 1-\delta+\delta^3-\delta^4+\delta^6-\delta^7+...\delta^{3k-3}-\delta^{3k-2}+\delta^{3k}V^2_{3n}$$

öyle ki, $V^2_{3n} = 1$

$$V^2_{3n-3k} = 1-\delta+(1-\delta)\delta^3+(1-\delta)\delta^6+\ldots+(1-\delta)\delta^{3k-3}+\delta^{3k}$$

$$V^2_{3n-3k} = (1-\delta)(1+\delta^3+\delta^6+\ldots\delta^{3k-3})+\delta^{3k}$$

$$V^2_{3n-3k} = \frac{(1-\delta)(1-\delta^{3k})}{1-\delta^3}+\delta^{3k} \Leftrightarrow V^2_{3n-3k} = \frac{(1-\delta)(1-\delta^{3k})}{(1-\delta)(1+\delta+\delta^2)}+\delta^{3k}$$

$$\Leftrightarrow V^2_{3n-3k} = \frac{(1-\delta^{3k})}{(1+\delta+\delta^2)}+\delta^{3k} \Leftrightarrow V^2_{3n-3k} = \frac{1+\delta^{3k+1}+\delta^{3k+2}}{(1+\delta+\delta^2)}$$

Bu bize, 2. oyuncunun $t = 3n-3k, k = 0,1,...,n-1$ periyotlarındaki devam değerini verir. $t = 3n-3k-1$ periyodunda, 1. oyuncunun teklifi

$$(V^1_{3n-3k-1} = 1-V^2_{3n-3k-1}, V^2_{3n-3k-1} = \delta V^2_{3n-3k})$$
$$= (\frac{1-\delta+\delta^2-\delta^{3k+2}-\delta^{3k+3})}{(1+\delta+\delta^2)}, \frac{(\delta+\delta^{3k+2}+\delta^{3k+3})}{(1+\delta+\delta^2)})$$

şeklindedir.

$t = 3n-3k-2$ periyodunda, 1. oyuncu şu teklifi yapar:

$$
\begin{aligned}
&(V^1_{3n-3k-2} = 1 - V^2_{3n-3k-2}, V^2_{3n-3k-2} = \delta V^2_{3n-3k-1}) \\
&= (\frac{(1+\delta-\delta^{3k+3}-\delta^{3k+4})}{(1+\delta+\delta^2)}, \frac{(\delta^2+\delta^{3k+3}+\delta^{3k+4})}{(1+\delta+\delta^2)})
\end{aligned}
$$

Dolayısıyla, 1. periyotta, $k = n - 1$, 1. oyuncu şu teklifi yapar:

$$
(V^1_1 = \frac{(1+\delta-\delta^{3(n-1)+3}-\delta^{3(n-1)+4})}{(1+\delta+\delta^2)} = \frac{(1-\delta)(1+\delta-\delta^{3n}-\delta^{3n+1})}{(1-\delta)(1+\delta+\delta^2)} =
$$

$$
\frac{(1-\delta)(1+\delta)(1-\delta^{3n})}{(1-\delta^3)} = \frac{(1-\delta^2)(1-\delta^{3n})}{(1-\delta^3)}, V^2_1 = 1 - V^1_1 = 1 - \frac{(1-\delta^2)(1-\delta^{3n})}{(1-\delta^3)})
$$

Bu teklif 2. oyuncu tarafından kabul edilir ve pazarlık ilk periyot sonunda biter.

b) Sonsuz olduğu durumda, her alt-oyun kendisinden 3 periyot önce ve 3 periyot sonra başlayan her alt-oyuna denktir, dolayısıyla üç tip alt-oyun vardır. Dolayısıyla, $V^2_{3n} = V^2_{3n+3}$ ve 1. denklem şu hali alır:

$$
\begin{aligned}
V^2_{3n} &= 1 - \delta + \delta^3 * V^2_{3n+3} \\
V^2_{3n} &= 1 - \delta + \delta^3 * V^2_{3n} \Leftrightarrow V^2_{3n} = \frac{1-\delta}{1-\delta^3}
\end{aligned}
$$

Bu 2. oyuncunun verdiği teklifte kendisi için istediği miktardır. 1. oyuncuya $V^2_{3n} = 1 - V^2_{3n} = \frac{\delta-\delta^3}{1-\delta^3}$ önerir.

3n-1'inci periyotta, 1. oyuncu 2. oyuncuya $V^2_{3n-1} = \delta V^2_{3n} = \frac{\delta-\delta^2}{1-\delta^3}$ ve kendisine $V^1_{3n-1} = 1 - V^2_{3n} = \frac{1-\delta^3-(\delta-\delta^2)}{1-\delta^3}$ ayırır.

3n-2'inci periyotta, 1. oyuncu 2. oyuncuya $V^2_{3n-2} = \delta^2 V^2_{3n} = \frac{\delta^2-\delta^3}{1-\delta^3}$ ve kendisine $V^1_{3n-2} = 1 - V^2_{3n} = \frac{1+\delta^2}{1-\delta^3}$ ayırır. Dolayısıyla, denge stratejileri:

1. oyuncu
3n-2. periyot $(\frac{1+\delta^2}{1-\delta^3}, \frac{\delta^2-\delta^3}{1-\delta^3})$ teklifini verir
3n-1. periyot $(\frac{1+\delta^2}{1-\delta^3}, \frac{\delta-\delta^2}{1-\delta^3})$ teklifini verir
3n. periyot $\frac{\delta-\delta_3}{1-\delta^3}$'ten büyük eşit herhangi bir teklifi kabul eder.

2. oyuncu
3n-2. periyot $\frac{\delta^2-\delta_3}{1-\delta^3}$'ten büyük eşit herhangi bir teklifi kabul eder.
3n-1. periyot $\frac{\delta-\delta_3}{1-\delta^3}$'ten büyük eşit herhangi bir teklifi kabul eder.
3n. periyot $(\frac{\delta-\delta^3}{1-\delta^3}, \frac{1-\delta}{1-\delta^3})$ teklifini verir.
tüm $n = 1, 2, ...$ için.

Ilk periyot, 1. oyuncu 2. oyucnuya $\frac{\delta^2-\delta^3}{1-\delta^3}$ teklifini verir ve bu teklif kabul edilir.

c) Sonsuz periyotlu oyunda, oyuncuların periyot basında kimin teklifi yapacağı belirlenmeden önceki beklenen değerlerine V1 veV2 diyelim. Acıktır ki, oyun sabittir, dolayısıyla devam kazançları her periyodun başında aynıdır.

Şimdi, 1/2 olasılıkla 1. oyuncu seçilecek ve $(1 - \delta V2, \delta V2)$ teklifini verecek ve bu teklif kabul edilecek. Eğer 2. oyuncu teklifi yapacak olursa, ki bu da 1/2 olasılıkl olacaktır, 1. oyuncuya $\delta V1$ teklf edecektir ve bu da kabul edilecektir.

Nihayetinde, 1. oyuncunun kazancı $V1 = 1/2(1 - \delta V2) + 1/2\delta V1$'dir.

Benzer şekilde, 2. oyuncu için kazanç $V2 = 1/2\delta V2 + 1/2(1 - \delta V1)$ olur.

Bu iki bilinmeyenli iki denklem sistemi verir bize ve bu sistem kolayca çözülebilir. Yanıt $V1 = 1/2, V2 = 1/2$'dir ve teklifler de bunun ışığında hesaplanır (mesela, eğer 1. oyuncu teklif verecekse, $(1 - \delta/2, \delta/2)$ teklifini verir). Hesaplanan bu stratejilerin aslen ATD olduğu neredeyse hemen stratejilerin yapısından gelir.

Sonlu periyotlu oyunu ise geriye doğru tümevarım yöntemiyle çözebiliriz. i oyuncusunun, kimin teklif yapacağı belirlenmeden önce, t periyodunun başındaki kazancı V_t^i olsun.

Son periyotta, yani 3n. periyot, eğer 1. oyuncu seildiyse, (1,0) teklifini yapar ve teklif kabul edilir. Eğer 2. oyuncu seçildiyse, (0,1) teklifini yapar. Dolayısıyla, kimin teklif vereceği belirsizliği çözülmeden önce, 1. oyuncunun beklenen kazancı $V_{3n}^1 = 1/2 * 0 + 1/2 * 1 = 1/2$'dir (aynı şekilde ikinci oyuncu için $V_{3n}^2 = 1/2$ elde ederiz).

Bir önceki periyotta, yani $3n - 1$. periyotta, eğer teklif yapmak için 1. oyuncu seçildiyse, önerebileceği 2. oyuncu tarafından kabul edilecek en en düşük miktar $(1-\delta*1/2, \delta*1/2)$'dir. Eğer 2. oyuncu bir teklif yapacaksa, $(\delta*1/2, 1-\delta*1/2)$ teklifini yapar. Dolayısıyla, 1. oyuncunun, belirsizlik çözülmeden önce, $3n-1$ periyodundaki beklenen değeri $V^1_{3n-1} = (1/2)*(\delta/2) + (1/2)*(1-\delta/2) = 1/2$'dir. (aynısını 2. oyuncu için de buluyoruz). $3n-1$ periyodunun başındaki beklenen değer, bir önceki periyottaki değerle aynı olduğundan, $3n-2$ periyodundaki teklifler de $3n-1$'deki ve tüm önceki periyotlardaki tekliflerle aynı olacaktır. Dolayısıyla, her t periyodunda, teklif verecek olan oyuncu diğer oyuncuya $\delta/2$ teklif eder ve $1-\delta/2$'yi kendine saklar. Ilk periyot, seçilen oyuncu $\delta/2$ teklifinde bulunur ve diğer oyuncu bunu kabul eder.

Soru 3

$C > 0$ olduğunu varsayıyoruz. Diyelim ki, k tane firma markete girmiş olsun. Alt-oyun tam dengesindeki firmaların üretecekleri miktarları çözelim önce. (Belirtelim ki, bir firma hiçbir zaman 1'den büyük bir miktar üretmeyecektir, çünkü 0 üretmek her zaman daha iyidir.) Eğer $k = 0$ ise, çözecek birşey yoktur. Eğer $k = 1$ ise firmanın problemi $max_{0 \leq q \leq 1} q(1-q) - C$'dir. Birinci dereceden türevi $1 - 2q = 0$'dır ve optimal miktar $1/2$'dir. Eğer $k \geq 2$ ise, o zaman Cournot oyununa benzer bir oyun elde ederiz. Firma i için en iyi tepki fonksiyonunu $max_{0 \leq q \leq 1} q_i(1-q_i-\sum_{j\neq i} q_j) - C$ problemini çözerek bulabiliriz. En iyi tepki fonksiyonu eğer $\sum_{j\neq i} q_j < 1$ ise $q_i^*(\sum_{j\neq i} q_j) = (1-\sum_{j\neq i} q_j)/2$'dir, eğer $\sum_{j\neq i} q_j \geq 1$ ise $q_i^*(\sum_{j\neq i} q_j) = 0$'dır. Eğer tüm en iyi tepki fonksiyonlarını ortak çözersek (bunu yapmak birinci dereceden türevleri ortak çözerek kolayca yapılır), her firmanın $\frac{1}{k+1}$ üreteceği sonucuna ulaşırız. Market üretim miktarı bu durumda $\frac{k}{k+1}$, market fiyatı $\frac{1}{k+1}$ ve markete giren her bir fimanın karı da $\frac{1}{(k+1)^2} - C$ olur. Ilerlemeden önce, belirtelim ki, bu kar miktarı $k = 1$ için de geçerlidir.

Artık bir alt-oyun tam dengedeki ikinci bölümde ne olacağın ı biliyoruz ve şimdi firmalarım markete girip girmeme kararı verdikleri ilk kısma bakabiliriz. Yukarıdaki analizden gördüğümüz üzere, firma sayısı artıkça firma başına düşen kar azalır. Markete girmek hiçbir firma için karlı olmadığı ve her firma girse bile negatif olmayan kar elde edilebildiği birkaç tane 'köşe' durumu sözkonusu. Ancak eğer bu köşe durumlardan birinde değilsek, o zaman marketteki firma sayısı öyle olmalı ki, marketteki firmaların kar seviyesi pozitif olmalı ve bir firma daha markete girdiği durumda ise negatif olmalı (ya da kar sıfır olabilir ve bir firma daha girdiinde ise negatif olabilir).

Karlar $\frac{1}{(k+1)^2} - C = 0$ ya da $k = 1/\sqrt{C} - 1$ olduğunda sıfır olacaktır. Karlar, eğer $k < 1/\sqrt{C} - 1$ ise pozitif, $k > 1/\sqrt{C} - 1$ ise de negatif olacaktır. Eğer $C > 1/4$ ise, markete girmek her zaman negatif kar getirir (cünkü bu durumda $1 > 1/\sqrt{C} - 1$ olacaktır) ve hiçbir firma markete girmemeli. Eğer $C = 1/4$ ise, o zaman markette ya sıfır firma yer alır ya da tek bir firma. Eğer $C < (\frac{1}{n+1})^2$ ise, o zaman bütün firmalar markete girse bile pozitif kar olacaktır (çünkü bu durumda $n < 1/\sqrt{C} - 1$ olacaktır), dolayısıyla tüm firmalar markete girmelidirler. Eğer $C = (\frac{1}{n+1})^2$ ise, o zaman $n - 1$ firma varken pozitif kar olacaktır, ancak sonuncu firma girerse kar sıfır olacaktır. Dolayısıyla, bu durumda markette ya n ya da $n - 1$ firma olmalıdır. $(\frac{1}{n+1})^2 < C < 1/4$ ise, o zaman marketteki firma sayısı $1/\sqrt{C} - 1$'den küçük veya eşit en büyük tam sayı olacaktır (ve eğer $1/\sqrt{C} - 1$ bir tam sayı ise, o zaman markete giren firma sayısı $1/\sqrt{C} - 2$ de olabilir).

Nihayetinde, yanıt C'ye bağlıdır. Eğer $C > 1/4$ ise, tek alt-oyun tam denge her firmanın markete girmemesi ve girenlerin de, k giren firma sayısıyken, $1/(k+1)$ üretmeleri şeklindedir. Eğer $C < (\frac{1}{n+1})^2$ ise o zaman, tek alt-oyun tam dengede tüm firmalar markete girer ve, k giren firma sayısıyken, giren her firmanın $1/(k+1)$ üretir. Eğer $(\frac{1}{n+1})^2 \leq C \leq 1/4$ ise, o zaman alt-oyun tam dengeler markete girenlerin sayısı $1/\sqrt{C} - 1$'den küçük veya eşit en büyük tam sayı ise oluşacaktır ve her giren firma $1/(k+1)$ üretecektir (belirtelim ki, bir alt-oyun tam dengede hangi firmaların gireceği ve hangi firmaların girmeyeceği açık bir şekilde belirtilir). $(\frac{1}{n+1})^2 \leq C \leq 1/4$ olduğu ve aynızamanda da $1/\sqrt{C} - 1$'in bir tam sayı olduğu durumda da, alt-oyun tam dengeler vardır, öyle ki, $1/\sqrt{C} - 2$ firma markete girer ve her biri, k giren firma sayısıyken, $1/(k+1)$ üretir.

Soru 4

Burada sonlu bir tam bilgi oyunu var ve dolayısıyla alt-oyun tam dengeler geriye doğru tümevarım çözümlerine tekabul ederler. Geriye doğru tümevarım sonucunu hesaplayalım.

Oyundaki son tura bir bakalım. (Belirtelim ki, ilk 999 yıl için her muhtemel geçmişe denk gelen birçok değişik son tur sözkonusu, ancak geriye doğru tümevarım çözümünde firmaların son turdaki eylemleri o ana kadar ne olduğundan bağımsızdır). Goliath en son oynar ve yeni firmanın o turda ne yaptığını gözlemler. Eğer yeni firma tarayıcı ürettiyse, Goliath içn kendi tarayıcısını güncellemek yıllık toplam kazancına 2 eklemek demektir, güncellememek ise 1 eklemek demektir. Dolayısıyla, Goliath tarayıcısını günceller. Benzer şekilde, eğer yeni firma arama motoru üretirse, o zaman Goliath güncellememeli çünkü güncellememek toplam yıllık kazancına 4 eklerken, güncellemek sadece 3 ekler. Goliath'ın güncellemeyeceğini bilen yeni firma, tarayıcı üretmelidir, çünkü bu kendisine 2'lik bir kar getirecektir ve bu arama motoru üretseydi alacağı 1'lik kazançtan daha büyüktür.

999 yılına gidersek, görüyoruz ki, bu yıl ne olursa olsun, Goliath gelecek yıl 4 kazanacak. Dolayısıyla bu yıl da 1000 yılından farklı olmayacak. Eğer 999'da yeni firma tarayıcı üretirse, o zaman Goliath'ın toplam yıllık karları toplamı eğer güncellerse 1-998 yıllarında kazandığı artı 4 artı 1 olacaktır, eğer güncellemezse 1-998 yıllarında kazandığı artı 4 artı 2 olacaktır. Dolayısıyla, Goliath güncellemeyecektir. Benzer bir akıl yürütme bize gösterir ki, Goliath, 999 yılında, eğer yeni firma aram motoru üretirse güncellemelidir. Goliath'ın güncellemeyeceğini bilen yeni firma tarayıcı üretmelidir, çünkü bu kendisine 2 getirirken, arama motoru üretmek sadece 1 getirecektir.

Benzer akıl yürütme tüm yıllar için geçerli olacaktır, dolayısıyla, tek alt-oyun tam dengede Goliath güncelleme seçeneği çıktığı durumlarda güncellemez ve her yeni firma da mümkün olan her durumda tarayıcı üretir.