14.12 Oyun Teorisi

Muhamet Yıldız

Güz 2005

Ödev 4 Çözümleri

1. Belirtelim ki, (A,L) statik oyunun bir Nash dengesidir. Dolayısıyla, statik oyunun 5 kez tekrarlandığı oyunda, her tekrarda (A,L) oynamak bir alt-oyun tam dengedir: herhangi bir periyotta hiçbir oyuncu başka bir stratejiye çark etmeyi istemez. Benzer şekilde, (B,R) de statik oyunun bir Nash dengesi olduğundan, her tekrarda (B,R) oynamak yine bir alt-oyun tam dengedir.

   Belirtelim ki, (B,L) statik oyunun bir Nash dengsi değildir. Her iki oyuncunun da (B,L)'den çark etme isteği vardır. Dolayısıyla, ilk periyot (B,L) oynamalarını garanti etmek için ilerideki tekrarlarda çark etmeleri halinde cezalandırmak gerekir. 5 periyotluk oyunda, alttaki strateji profilini düşünelim:

   - ilk periyot (B,L) oyna;

   - eğer ilk periyot (B,L) ya da (A,R) oynandıysa, 2. ve 3. periyotlarda (A,L), 4. ve 5. periyotlarda ise (B,R) oyna;

   - eğer ilk periyotta (A,L) oynandıysa, 2-5. periyotlarda (B,R) oyna;

   - eğer ilk periyotta (B,R) oynandıysa, 2-5. periyotlarda (A,L) oyna;

   Bu strateji vektörünün alt-oyun tam denge olup olmadığını kontrol etmek için, tek-çark prensibini kullanabiliriz: her bilgi kümesi için, bir oyuncunun o periyot çark edip diğer gelecek periyotlarda ise bahsi geçen stratejiye sadık kalarak daha kazançlı hale gelebilir mi ona bakıyoruz. 2. periyottan 5. periyota kadar tüm bilgi kümelerinde, oyuncular statik oyunun bir Nash dengesini oynamalılar. Dolayısıyla, bu periyotlarda oyuncuların çark etme eğilimi yoktur (ve bu tip çark etmelerin gelecekte getireceği bir kazanç yoktur). 1. periyot içinse, eğer 1. oyuncu çark ederse, bu periyot 2 kazanır ama gelecekte 2 kaybeder çünkü strateji vektörü (AL,AL,BR,BR) yerine (BR,BR,BR,BR) oynamalarını dikte ettirir. Benzer şekilde, eğer 1. periyotta 2. oyuncu çark ederse, bu periyot 2 kazanır ancak gelecek periyotlarda 2 kaybeder çünkü strateji vektörü (AL,Al,BR,BR) yerine (AL,AL,AL,AL) oynamalarını gerektirir. Dolayısıyla, iki oyuncu da tek periyotluk bir çarktan kazançlı çıkmazlar. DOlayısıyla, yukarıda verilen strateji vektörü alt-oyun tamdır.

Benzer bir şekilde, ilk periyot (A,R) oynanan bir alt-oyun tam denge oluşturabiliriz.

2. Alttaki tüm durumlar için, verilen strateji vektörünün alt-oyun tam denge olup olmadığını kontrol etmek için tek-çark prensibini uyguluyoruz:

   (a)
   - Diyelim ki, Goliath Yazılım, geçmişte her yeni firma bir tarayıcı ürettiğinde X'i güncellemiş olsun. Eğer mevcut yeni firma aram motoru yerine bir tarayıcı üretirse ve Goliath stratejisine göre güncelleme yaparsa, yeni firma 1 yerine 0 kazanır. Dolayısıyla, yeni firma çark ederse kayba uğrar.
   - Diyelim ki, Goliath Yazılım, geçmişte her yeni firma bir tarayıcı ürettiğinde X'i güncellemiş olsun. Eğer Goliath, yeni firma tarayıcı ürettiğinde güncelleme yapmayı seçmezse ancak tüm diğer oyuncular gelecekte verilen stratejiye göre oynarlarsa, o zaman Goliath'ın kazancı

$$\begin{aligned} & 2 + 2\,(0.9) + 2\,(0.9)^2 + ... \\ = \quad & \frac{2}{1-0.9} = 20 \end{aligned}$$

     olur. Öte yandan eğer Goliath yeni firma tarayıcı ürettikten sonra güncellemeyi seçseydi, kazancı

$$\begin{aligned} & 1 + 4\,(0.9) + 4\,(0.9)^2 + ... \\ = \quad & 1 + \frac{4\,(0.9)}{1-0.9} = 37 \end{aligned}$$

olurdu. Dolayısıyla, tek periyotluk çark etmekten kayba uğrar.

- Eğer, Goliath Yazılım, geçmişte her yeni firma bir tarayıcı ürettiğinde X'i güncellememişse, mevcut yeni firma, stratejisi gereği Goliath'ın güncelleme yapmayacağından, arama motoru yerine tarayıcı üreterek daha kazançlı çıkar.
- Eğer, Goliath Yazılım, geçmişte her yeni firma bir tarayıcı ürettiğinde X'i güncellememişse ve mevcut yeni firma tarayıcıüretirse, o zaman Goliath için tek periyotluk bir çark olarak güncellemek kazançlı olamaz: bu periyot 1 kaybeder ve sonraki periyotlardaki kazançları etkilemez.

Dolayısıyla, tek-çark prensibini kullanarak, verilen strateji vektörünün bir alt-oyun tam denge olduğunu göstermiş olduk. Eğer bu strateji profili kullanılırsa, yeni firma her zaman arama motoru üretir ve Goliath asla güncellemez.

(b) Eğer yeni firma tarayıcı üretirse, Goliath Yazılım güncelleme yerine güncellememeyi seçerek şu anki periyottaki kazancını arttırabilir; her iki durumda da, gelecekteki yeni firmalar her zaman arama motoru üretirler. Dolayısıyla, Goliath Yazılım mevcut stratejisinden kazançlı bir şekilde çark edebilir. Bu da demektir ki, verilen strateji vektörü alt-oyun tam değildir. Bu strateji vektörü, yeni firmaların her zaman arama motoru ürettiği ve Goliath'ın da hiç güncelleme yapmadığı sonucunu doğurur.

(c) Öncelikle kutsal yılları düşünelim. Her iki oyuncu için de, mevcut periyotta verili stratejiden çark etmek kayba uğramak demektir ve gelecekteki kazançları etkilemez (tüm oyuncular gelecekteki periyotlarda verili stratejiye göre oynarlarsa). Dolayısıyla, kutsal yıllarda tek periyotluk çark etmeler kazançlı değildir.

Kutsal olmayan yıllardaki stratejiler (a)'da açıklandığı gibidir. Özellikle, kutsal olmayan yıllarda gelen yeni firmalar açısından, sadece tek periyot var oldukları için kutsal yıllar bir anlam ifade etmez; dolayısıyla, (a)'da kullandığımız akıl yürütme yeni firmalar için doğrudan uygulanabilir: bu yıllarda tek periyotluk çark etmelerden kazançlı çıkamazlar.

Şimdi diyelim ki, Goliath Yazılım geçmişteki kutsal olmayan yıllarda her yeni firma bir tarayıcı ürettiğinde X'i güncellememiş olsun ve kutsal olmayan bir yıl olan mevcut periyotta, mevcut yeni firma tarayıcı üretmiş olsun. O zaman, Goliath'ın güncellemeyi seçerek yapacağı tek periyotluk çark kazançlı olamaz: bu periyot 1 kaybeder ve sonraki periyotlardaki kazançları etkilemez.

Son olarak, diyelim ki, Goliath Yazılım geçmişteki kutsal olmayan yıllarda her yeni firma bir tarayıcı ürettiğinde X'i güncellemiş olsun. Eğer yeni firma mevcut periyotta (kutsal olmayan bir yıl) tarayıcı üretirse ve şimdiki yıl ile bir sonraki kutsal yıl arasında τ kadar yıl varsa, o zaman Goliath (yeni firmaların verili stratejiyi takip ettiklerini varsayarsak) stratejisinden şu kazancı elde eder:

$$1 + 4\,(0.9) + 4\,(0.9)^2 + ... + 4\,(0.9)^\tau + 2\,(0.9)^{\tau+1} + 4\,(0.9)^{\tau+2} + ...$$

Eğer Goliath şu anki periyotta çark ederse ama sonraki periyotlarda verili stratejiyi takip ederse, elde edeceği kazanç şudur:

$$2 + 2\,(0.9) + 2\,(0.9)^2 + ... + 2\,(0.9)^\tau + 2\,(0.9)^{\tau+1} + 2\,(0.9)^{\tau+2} + ...$$

Dolayısıyla, böyle bir çarktan gelecek kazanç

$$\begin{aligned} & 1 - 2\,(0.9) - 2\,(0.9)^2 - ... - 2\,(0.9)^\tau - 0\,(0.9)^{\tau+1} - 2\,(0.9)^{\tau+2} - ... \\ & = 1 - \frac{2\,(0.9)}{1-(0.9)} + \frac{2\,(0.9)^{\tau+1}}{1-(0.9)^{100}} \end{aligned}$$

idir. Bu miktar en büyük değerini $\tau = 0$ iken alır; yani bir sonraki yıl kutsal bir yılsa. Ancak, yukarıda $\tau = 0$ yerine koyarsak,

$$1 - \frac{2\,(0.9)}{1-(0.9)} + \frac{2\,(0.9)}{1-(0.9)^{100}} \approx -15$$

elde ederiz. Dolayısıyla, Goliath Yazılım bu tip bilgi kümelerinde tek periyotluk çarklardan kazanç sağlamaz.

Dolayısıyla, tek çark prensibini kullanarak, verili strateji vektörünün altoyun tam denge olduğunu göstermiş olduk. Bu strateji vektörü için, yeni firmaların her yüz yılda bir tarayıcı ve diger yıllar aram motoru ürettiği ve Goliath'ın da hiçbir zaman güncelleme yapmadığı sonucuna varıyoruz.

(d) (c)'de olduğu gibi, eğer Goliath Yazılım kutsal olmayan bir yıl çark ederse, bunun kutsal olan yıllardaki kazancına herhangi bir etkisi olmaz. Ancak, (c)'deki strateji vektöründen farklı olarak, çok daha fazla yıl kutsal yıldır. Dolayısıyla, Goliath için verili stratejiyi takip etme isteği (c)'de olduğu kadar güçlü değildir. Goliath Yazılımın geçmişteki kutsal olmayan yıllarda her yeni firma bir tarayıcı ürettiğinde X'i güncellemiş olduğunu düşünelim. Diyelim ki, kutsal olmayan bu periyot, yeni firma tarayıcı üretsin; o zaman Goliath (diğer yeni firmaların verili stratejiyi takip ettiklerini varsayarsak) stratejisinden şu kazancı elde eder:

$$1 + 2\,(0.9) + 2\,(0.9)^2 + ... + 2\,(0.9)^{99} + 4\,(0.9)^{100} + 2\,(0.9)^{101} + ...$$

Eğer Goliath mevcut periyotta çark ederse ama sonraki periyotlarda stratejisine sadık kalırsa, şu kazancı elde eder:

$$2 + 2\,(0.9) + 2\,(0.9)^2 + ... + 2\,(0.9)^{99} + 2\,(0.9)^{100} + 2\,(0.9)^{101} + ...$$

Dolayısıyla, böyle bir çarktan gelecek kar

$$1-0\,(0.9)-0\,(0.9)^2-...-0\,(0.9)^{99}-2\,(0.9)^{100}-0\,(0.9)^{101}-...$$
$$=1-\frac{2\,(0.9)^{100}}{1-(0.9)^{100}}\approx 1$$

'e eşittir. Dolayısıyla, Goliath Yazılım böyle bir bilgi kümesinde kazançlı bir şekilde çrk edebilir. Dolayısıyla, verilen stratji vektörü alt-oyun tam denge değildir. Bu strateji vektöründe, yeni firma her yüz yılda bir arama motoru, diğer yıllarsa tarayıcı üretir; Goliath ise asla güncellemez.

3. (a) Bu oyunun mormal biçim gösterimi alttaki gibidir:

	Çalış,Çalış	Çalış,Çalışma	Çalışma,Çalış	Çalışma,Çalışma
Öde	$\pi-\omega,\omega-c$	$\pi-\omega,\omega-c$	$-\omega,\omega$	$-\omega,\omega$
Ödeme	$\pi,-c$	0,0	$\pi,-c$	0,0

Yukarıdaki tabloda, firma satır oyuncusu ve işçi de kolon oyuncusdur. Görüyoruz ki, tek bir Nash dengesi vardır, (Ödeme, (Çalışma,Çalışma)).

(b) i. Bu strateji vektörü δ'nın hiçbir değeri için alt-oyun tam denge değildir. Firmanın strateji verili iken, işçi her periyot 'çalış mama'ya çark etme isteği içindedir, dolayısıyla her periyot $\omega-c$ yerine ω kazanacaktır. Işçinin stratejisi verili iken, firma da her periyot 'ödememe' stratejisine çark etme eğilimi içindedir, dolayısıyla her periyot $\pi-\omega$ yerine π kazanacaktır.

ii. Bu strateji vektörü δ'nın hiçbir değeri için alt-oyun tam denge değildir. Firmanın stratejisi verili iken, firma her zaman ödeme yaparken, işçinin her periyot çalışmamaya çark etme eğilimi vardır.

iii. Bu strateji vektörü de alt-oyun tam denge olamaz. Firma çark ederse ve ödeme yapmazsa, işçi yine de her periyot çalışacaktır. Dolayısıyla, firma her periyot ödeme yapmamaya çrk edip kazançlı çıkabilecektir.

iv. Herhangi bir bilgi kümesinde tek periyotluk çark etmenin kazançlı olup olmadığını kontrol ediyoruz. Eğer işçi tüm geçmiş periyotlarda çalıştıysa (ya da $t=0$ ise), firma ödemeyerek kazancını arttıramaz; bu hem bu periyot hem de gelecek periyotlarda kendisine $\pi-\omega$ yerine 0 verecektir. Ayrıca, eğer işçi bütün geçmiş periyotlarda çalışmadıysa, firma kazancını ödeme yaparak arttıramaz; bu mevcut periyotta $-\omega$ yerine 0 getirecek ve gelecek periyotlar etkilenmeyecektir. Eğer işçiye mevcut periyotta ödeme yapilmadıysa ve ve tüm geçmiş periyotlarda çalıştıysa (ya da $t = 0$ ise), işçi kendi stratejisinden $\frac{\omega-c}{1-\delta}$ miktarında bir devam kazancı sağlar; diğer taraftansa, eğer bu periyot çalışmamaya çark ederse, ama sonraki periyotlarda stratejisine uyarsa, ω kazanır. O zaman, çark etme eğilimi ancak ve ancak

$$\frac{w-c}{1-\delta} \geq w \iff \delta \geq \frac{c}{w}$$

ise yoktur. Eğer işçiye mevcut periyotta ödeme yapılmadıysa, işçi kendi stratejisinden $\delta\frac{\omega-c}{1-\delta}$ miktarında bir devam kazancı sağlar; mevcut periyotta çalışmaya tek periyotluk bir çark işçiye şimdiki periyot c'ye mal olur ve gelecek periyotlarda ki kazançları etkilemez. Dolayısıyla, işçi, δ'nın hiçbir değeri için, bu tip bilgi kümelerinde çark etmek istemez. Eğer işçi, bütün geçmiş periyotlarda çalışmadıysa, o zaman, yine, çalışmaya çark etmek bu periyot c'ye mal olur ve gelecekteki kazançları etkilemez. Dolayısıyla, verilen strateji vektörü, $\delta \geq \frac{c}{w}$ için bir alt-oyun dengesidir.

v. Hem işe alınma hem işsizlik durumlarında her iki oyuncunun da çrk etme eğilimi olmaması için gerekli koşulları kontrol etmeliyiz. Işe alınma durumunda, (b)'nin (iv)'ünde olduğu gibi, firmanın ve işçinin kazançları, sırasıyla, $\frac{\pi-\omega}{1-\delta}$ ve $\frac{\omega-c}{1-\delta}$ şeklindedir. Eğer, firma işe alınma durumunda çark erderse (ama sonrasında stratejisini takip ederse), mevcut periyotta ω kazanır ve oyun T periyot boyunca işsizlik durumuna geçer ve bu süre zarfında, işe alınana kadar, işçinin kazancı 0 olur. Dolayısıyla, işçinin işe alınma durumunda çark etmemesi için, gerekli olan koşul

$$\begin{aligned} \frac{(w-c)}{1-\delta} &\geq w + \delta^{T+1}\frac{(w-c)}{1-\delta} \\ &\Longrightarrow (w-c)\,\delta^{T+1} - w\delta + c \leq 0 \qquad (1) \end{aligned}$$

idir. Firmanın, işe alınma durumunda çark etme eğilimi yoktur, çünkü eğer ödememeye çark ederse, işçi o periyot çalışmaz ve stratejisine göre oyun T periyot boyunca işsizlik durumuna geçer. Dolayısıyla, firma $\omega - c$ yerine 0 kazanır, hem bu periyot hem de gelevek T periyot boyunca. Iki oyuncunun da işsizlik durumunda çark etme eğilimi yoktur. Çark ederse, bu periyot, işçi, 0 yerine $-c$ elde eder ve firma da 0 yerine $-\omega$ elde eder. Ayrıca, böyle bir çark işe alınma durumunu geciktirir. Eğer firma işe alınma durumunda çark etseydi, o zaman işçi, stratejisinden (bugün çalışma ve T periyotluk işsizlik durumunda da çalışma) $\delta^{T+1}\frac{\omega-c}{1-\delta}$ kazanır. Diğer taraftan, eğer işçi, işe alınma durumunda, ödeme yapılmadığında bile çlışmayı seçerse, o zaman oyun işe alınma durumunda kalır ve işçi $-c+\delta\frac{\omega-c}{1-\delta}$ kazanır. Dolayısıyla, böyle bir tek periyotluk çarkın kazançlı olmaması için, gerekli olan koşul

$$\begin{aligned} \delta^{T+1}\frac{(w-c)}{1-\delta} &\geq -c+\delta\frac{(w-c)}{1-\delta} \\ \implies & w+\delta^{T+1}\frac{(w-c)}{1-\delta} \geq \frac{(w-c)}{1-\delta} \qquad (2) \end{aligned}$$

idir. Kolayca gösterebiliriz ki, işsizlik durumunda ne işçi ne de firma kazançlarını tek periyotluk bir çarkla arttıramazlar. (1) ve (2)'deki eşitsizliklerin ikisi de ancak ve ancak iskonto faktörü

$$\left\{\delta \in (0,1) : (w-c)\,\delta^{T+1} - w\delta + c = 0\right\}$$

kümesine (boş olabilir ya da olmayabilir) aitse sağlanır. Dolayısıyla, tek çark prensibini kullanarak, verili strateji vektörü alt-oyun dengesidir ancak ve ancak iskonto faktörü bu kümeye aitse.