14.12 Oyun Teorisi

Muhamet Yıldız

Güz 2005

Ödev 5 Çözümleri

1. **1. problemin çözümü**

   (a) Oyun formel olarak şöyle yazılabilir:
   Eylem uzayı: $A_1 = \{X, Y, Z\}$, $A_2 = \{L, R\}$
   Tip uzayı: $T_1 = \{t_1\}$, $T_2 = \{\theta = -1, \theta = 1\}$
   Inanışlar: $p(\theta = 1 : t_1) = p(\theta = -1 : t_1) = 1/2$, $p(t_1 : \theta_1) = p(t_1 : \theta_2) = 1$
   Son olarak, iki oyuncu için kazançlar altta verilmiştir:
   $u_1(X, L; \theta = -1, t_1) = 3$ ve $u_2(X, L; \theta = -1, t_1) = -1$
   $u_1(Y, L; \theta = -1, t_1) = 2$ ve $u_2(Y, L; \theta = -1, t_1) = -2$
   $u_1(Z, L; \theta = -1, t_1) = 0$ ve $u_2(Z, L; \theta = -1, t_1) = 0$
   $u_1(X, R; \theta = -1, t_1) = 0$ ve $u_2(X, R; \theta = -1, t_1) = 0$
   $u_1(Y, R; \theta = -1, t_1) = 2$ ve $u_2(Y, R; \theta = -1, t_1) = -1$
   $u_1(Z, R; \theta = -1, t_1) = 3$ ve $u_2(Z, R; \theta = -1, t_1) = 1$
   $u_1(X, L; \theta = 1, t_1) = 3$ ve $u_2(X, L; \theta = 1, t_1) = 1$
   $u_1(Y, L; \theta = 1, t_1) = 2$ ve $u_2(Y, L; \theta = 1, t_1) = 2$
   $u_1(Z, L; \theta = 1, t_1) = 0$ ve $u_2(Z, L; \theta = 1, t_1) = 0$
   $u_1(X, R; \theta = 1, t_1) = 0$ ve $u_2(X, R; \theta = 1, t_1) = 0$
   $u_1(Y, R; \theta = 1, t_1) = 2$ ve $u_2(Y, R; \theta = 1, t_1) = 1$
   $u_1(Z, R; \theta = 1, t_1) = 3$ ve $u_2(Z, R; \theta = 1, t_1) = -1$

   (b) 2. oyuncuyla başlarsak, $\theta = -1$ tipi için, R L'yi kesin domine eder, dolayısıyla $s_2(\theta = -1) = R$. $\theta = 1$ için, L R'yi kesin domine eder ve dolayısıyla, $s_2(\theta = 1) = L$. 1. oyuncu 1/2 olasılıkla 2. oyuncunun tipinin $\theta = -1$ olduğunu ve R oynayacağını ve 1/2 olasılıkla da 2. oyuncunun tipinin $\theta = 1$ olduğunu ve L oynayacağını öngörür. Dolayısıyla, beklenen değeri alttaki şekildedir:

$$E(U_1(X)) = 1/2 * U_1(X,R) + 1/2 * U_1(X,L) = 1/2 * 0 + 1/2 * 3 = 3/2$$
$$E(U_1(y)) = 1/2 * U_1(Y,R) + 1/2 * U_1(Y,L) = 1/2 * 2 + 1/2 * 2 = 2$$
$$E(U_1(Z)) = 1/2 * U_1(Z,R) + 1/2 * U_1(Z,L) = 1/2 * 3 + 1/2 * 0 = 3/2$$

Dolayısıyla, 1. oyuncu için optimal strateji Y oynamaktır. Dolayısıyla, Bayezyen Nash dengesi $(s_1 = Y, s_2(\theta = -1) = R, s_2(\theta = 1) = L)$'dir.

i. Eğer $\theta = -1$ ortak bilgi ise, kazançlar tablosu

	L	R
X	$3, -1$	$0, 0$
Y	$2, -2$	$2, -1$
Z	$0, 0$	$3, 1$

şeklindedir. Nash dengesi (Z,R)'dir.

ii. Eğer $\theta = 1$ ortak bilgi ise, kazançlar tablosu

	L	R
X	$3, 1$	$0, 0$
Y	$2, 2$	$2, 1$
Z	$0, 0$	$3, -1$

şeklindedir. Nash dengesi (X,L)'dir.

2. **2. problemin çözümü**

(a) Oyun formel olarak şöyle yazılabilir:
$G = \{A_1, ..., A_n; T_1, ..., T_n; p_1, ..., p_n; u_1, ..., u_n\}$
öyle ki, $A_i = [0, \infty)$, i oyuncusunun eylem uzayını,
$T_i = \{1, 2\}$, i oyuncusunun tip uzayını,
$p_i(t_{-i} : t_i) = 2^{1-n}$, her $t_{-i} \in T_1 \times T_2 \times ... \times T_{i-1} \times T_{i+1} \times ... \times T_n$ için, i oyuncusunun inanışlarını,
ve $u_i(x_1, x_2, ..., x_n; t_i) = \theta_i x_i - x_i \sum_{j=1}^{n} x_j$ da i oyuncusunun kazanç fonksiyonunu temsil eder.

(b) Her $j \neq i$ oyuncusunun kullandığı stratejiye $x_k(\theta_j)$ diyelim. O zaman, i oyuncusunun x_i kadar veri yollamasından elde edeceği beklenen kazanç

$$E\left[\theta_i x_i - x_i \sum_{j=1}^{n} x_j\left(\theta_j\right)\right]$$
$$= \theta_i x_i - x_i \sum_{j=1}^{n} E x_j\left(\theta_j\right)$$

idir. O zaman, bir birim veri daha yollamanın marjinal kazancı

$$\frac{d}{dx_i}\left[\theta_i x_i - x_i \sum_{j=1}^{n} E x_j\left(\theta_j\right)\right]$$
$$= \theta_i - 2x_i - \sum_{j\neq i} E x_j\left(\theta_j\right)$$

idir. Bu, x_i'nin tüm değerleri için, $\theta_i = 2$ için daha büyüktür. Dolayısıyla, dengede, daha yüksek θ'lı bir tip daha yüksek (veya eşit) bir x_i seçmeli. Dolayısıyla, altta vereceğimiz stratejilerin bir simetrik Bayezyen Nash dengesi olduğunu iddia ediyoruz. $x_j(1) = 0$, $x_j(2) = y > 0$, for $j = 1, ..., n$. Bunun denge olabilmesi için, $\theta_i = 2$ için, her $j \neq i$ için, $x_j(1) = 0$, $x_j(2) = y$ olduğunda, $x_i = y$'de bir birim daha veri yollamanın marjinal getirisi 0 olmalı; yani,

$$2 - 2y - \sum_{j\neq i}\left[\frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}y\right] = 0$$
$$\Longrightarrow \; y = \frac{4}{n+3}$$

Aynı zamanda, $\theta_i = 1$ için, her $j \neq i$ için, $x_j(1) = 0$, $x_j(2) = y$ olduğunda, $x_i = 0$'de bir birim daha veri yollamanın marjinal getirisi sıfırdan küçük eşit olmalı; yani,

$$1 - 2.0 - \sum_{j \neq i} \left[\frac{1}{2} 0 + \frac{1}{2} y \right] \leq 0$$

$$\implies 0 + (n-1)\frac{y}{2} \geq 1$$

$y = \frac{4}{n+3}$'ü yerine koyduğumuzda,

$$\begin{aligned} &\iff \quad 2\frac{(n-1)}{(n+3)} \geq 1 \\ &\iff \quad n \geq 5 \end{aligned}$$

elde ediyoruz. Dolayısıyla, eğer $n \geq 5$ ise, her öğrencinin, $\theta = 1$ ise sıfır birim ve $\theta = 2$ ise de $\frac{4}{n+3}$ birim veri yolladığı bir Bayezyen Nash dengesi bulmuş olduk.