14.12 Oyun Teorisi

Muhamet Yıldız

Güz 2005

Ödev 6 Çözümleri

1. **1. problemin çözümü**

(a) Diyelim ki, j oyuncusu $b_j(v_j) = a + cv_j$ teklifini versin. j bu stratejiyi oynarken ve i'nin değeri v_i ve teklifi b_i iken, i oyuncusunun kazancı $u_i(v_i, v_j, b_i)$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} u_i(v_i, v_j, b_i) &= (v_i - b_i) \text{ if } v_j < \frac{b_i - a}{c} \\ &= \frac{1}{2}(v_i - b_i) + \frac{1}{2}(a + cv_j) \text{ if } v_j = \frac{b_i - a}{c} \\ &= (a + cv_j) \text{ if } v_j > \frac{b_i - a}{c} \end{aligned}$$

Dolayısıyla, i oyuncusunun b_i teklifinden kazancı, değeri v_i iken $\int_0^1 u_i(v_i, v_j, b_i)dF(v)$'ye eşittir, öyle ki, $F(v)$ j oyuncusunun v_j değeri için olalık dağılım fonksiyonudur. v_j $[0,1]$ üzerine tekdüze dağılıma tabi olduğundan, $F(v) = v$'dir.
O zaman, beklenen kazanç

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{b_i-a}{c}} (v_i - b_i)\, dv + \int_{\frac{b_i-a}{c}}^1 (a + cv)\, dv \\ = \; & (v_i - b_i)\left(\frac{b_i - a}{c}\right) + \left[av + \frac{c(v)^2}{2}\right]_{\frac{b_i-a}{c}}^1 \\ = \; & (v_i - b_i)\left(\frac{b_i - a}{c}\right) + a + \frac{c}{2} - \left(\frac{b_i - a}{c}\right)\left[a + \frac{c}{2}\left(\frac{b_i - a}{c}\right)\right] \\ = \; & (v_i - b_i)\left(\frac{b_i - a}{c}\right) + a + \frac{c}{2} - \left(\frac{a + b_i}{2}\right)\left(\frac{b_i - a}{c}\right) \\ = \; & \frac{1}{2}\left(\frac{b_i - a}{c}\right)(2v_i - 3b_i - a) + a + \frac{c}{2} \end{aligned}$$

b_i'ye göre birinci dereceden türevini sıfıra eşitlediğimizde,

$$-3\left(b_i-a\right)+\left(2v_i-3b_i-a\right)=0$$
$$\Longrightarrow\ b_i=\frac{1}{3}\left(v_i+a\right)$$

elde ederiz. Dolayısıyla, eğer j oyuncusu $b_j(v_j)=a+cv_j$ teklifinde bulunursa, o zaman i oyuncusunun en iyi tepkisi $b_i(v_i)=\frac{a}{3}+\frac{1}{3}v_i$'dir. Bir simetrik Bayezyen Nash dengesinde, $b_j(v)=b_i(v)$'dir.

$$\Longrightarrow\ \frac{a}{3}+\frac{v}{3}\equiv a+cv$$
$$\Longrightarrow\ c=\frac{1}{3},a=0$$

Dolayısıyla, simetrik ve lineer bir Bayezyen Nash dengesinde, her iki oyuncu da $b(v)=\frac{1}{3}v$ oynar.

(b) Diyelim ki, j oyuncusu $b(v_j)$ teklifinde bulunsun, öyle ki, $b(\cdot)$ kesin artan ve türevlenebilir bir fonksiyondur. j bu stratejiyi oynarken ve i'nin değeri v_i ve teklifi b_i iken, i oyuncusunun kazancı $u_i(v_i,v_j,b_i)$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}
u_i\left(v_i,v_j,b_i\right) &= \left(v_i-b_i\right)\ \text{if } v_j<b^{-1}\left(b_i\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(v_i-b_i\right)+\frac{1}{2}b\left(v_j\right)\ \text{if } v_j=b^{-1}\left(b_i\right)\\
&= b\left(v_j\right)\ \text{if } v_j>b^{-1}\left(b_i\right)
\end{aligned}$$

olur. (a)'daki akıl yürütmeyi takip ederek, görüyoruz ki, i'nin beklenen değeri

$$
\begin{aligned}
& \int_0^{b^{-1}(b_i)} (v_i - b_i)\, dv + \int_{b^{-1}(b_i)}^1 b(v)\, dv \\
= \quad & (v_i - b_i)\, b^{-1}(b_i) + [h(v_j)]_{b^{-1}(b_i)}^1 \\
= \quad & (v_i - b_i)\, b^{-1}(b_i) + h(1) - h\left(b^{-1}(b_i)\right)
\end{aligned}
$$

'dir, öyle ki, $h(v)$, $h'(v) = b(v)$ olarak tanımlıdır. b_i'ye göre birinci dereceden türevini sıfıra eşitlediğimizde, ve en iyi tepki için b_i^* yazdığımızda,

$$
\begin{aligned}
& -b^{-1}(b_i^*) + (v_i - b_i^*) \frac{db^{-1}(b_i^*)}{db_i^*} - h'\left(b^{-1}(b_i^*)\right) \frac{db^{-1}(b_i^*)}{db_i} = 0 \\
\Longrightarrow \quad & -b^{-1}(b_i^*) + \frac{1}{b'(b^{-1}(b_i^*))}\left[v_i - b_i^* - b\left(b^{-1}(b_i^*)\right)\right] = 0
\end{aligned}
$$

Simetrik bir denge için, $b_i^* = b(v_i) \Rightarrow b^{-1}(b_i^* = v_i)$ olmalı. Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
& -v_i + \frac{1}{b'(v_i)}[v_i - 2b(v_i)] = 0 \\
\Longrightarrow \quad & b'(v_i) + \frac{2b(v_i)}{v_i} = 1
\end{aligned}
$$

(c) Kolaylık olması için, yukarıdaki v_i yerine v yazalım. v^2 ile çarparsak,

$$b'(v)\,v^2 + 2b(v)\,v = v^2$$

$$\begin{aligned}
&\implies \quad \frac{d}{dv}\left[b(v)\,v^2\right] = v^2 \\
&\implies \quad b(v)\,v^2 = \int v^2 dv \\
&\implies \quad b(v)\,v^2 = \frac{v^3}{3} + c \\
&\implies \quad b(v) = \frac{v}{3} + \frac{c}{v^2}
\end{aligned}$$

elde ederiz. $b(v)$'nin, $v \in [0,1]$ için, kesin artan olması için, $c = 0$ olmalı. Dolayısıyla,

$$b(v) = \frac{v}{3}.$$

2. **2. problemin çözümü**

(a) Simetrik bir Bayezyen Nash dengesi hesaplamak için, i oyuncusunun, diğer tüm $j \neq i$ oyuncuları $b_j(v_j) = a + cv_j$ stratejisini kullanırken, en iyi tepki fonksiyonunu hesaplıyoruz.

Eğer i, değeri v_i iken, b_i teklifinde bulunursa, beklenen kazancı

$$[v_i - b_i]\,\Pr\left(\max_{j\neq i} b_j\,(v_j) < b_i\right)$$

olur. Sıfır olasılıkla olan $max_{j\neq i}b_j(v_j) = b_i$ durumunu yok sayabiliriz. Şimdi,

$$\begin{aligned}
\Pr\left(\max_{j\neq i} b_j\,(v_j) < b_i\right) &= \Pr\left(\max_{j\neq i} a + cv_j < b_i\right) \\
&= \Pr\left(\max_{j\neq i} v_j < \frac{b_i - a}{c}\right) \\
&= \left(\frac{b_i - a}{100c}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

Dolayısıyla, i'nin b_i'den elde edeceği beklenen kazancını

$$[v_i - b_i]\left(\frac{b_i - a}{100c}\right)^{n-1}$$

olarak yazabiliriz, öyle ki, bu miktar $b_i = \frac{a}{n} + (\frac{n-1}{n})v_i$'de maksimize edilir. Dolayısıyla, simetrik bir dengede,

$$\frac{a}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)v_i \equiv a + cv_i$$

$$\implies a = 0, b = \frac{n-1}{n}$$

olmalıdır. Dolayısıyla, $b_i = (\frac{n-1}{n})v_i, i = 1, ..., n$ strateji vektörü, simetrik ve lineer bir Bayezyen Nash dengesidir.

(b) Dengede, v_i değerli bir oyuncunun kazancı

$$[v_i - b_i(v_i)]\Pr\left(\max_{j\neq i} b_j(v_j) < b_i(v_i)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[v_i - \left(\frac{n-1}{n}\right)v_i\right]\Pr\left(\max_{j\neq i}\left(\frac{n-1}{n}\right)v_j < \left(\frac{n-1}{n}\right)v_i\right) \\
&= \frac{v_i}{n}\Pr\left(\max_{j\neq i} v_j < v_i\right) \\
&= \frac{v_i}{n}\left(\frac{v_i}{100}\right)^{n-1} \\
&= \frac{(v_i)^n}{n(100)^{n-1}}
\end{aligned}$$

'e eşittir.

(c) $n = 80$ ise, v değerine sahip bir oyuncunun beklenen kazancı $\frac{v^{80}}{80(100)^{79}}$'a eşittir. Bu v değerindeki bir oyuncunun oyunu oynamak için harcamayı gözden çıkarabileceği miktardır. Bu değer v'ye göre artmaktadır. Dolayısıyla, bir oyuncunun değeri arttıkça, daha 'şanslı' demektir. En şanslı ve en şanssız oyuncuların beklenen değerleri arasındaki fark

$$\begin{aligned} & \frac{100^{80}}{80 \times 100^{79}} - 0 \\ = & \frac{100}{80} \end{aligned}$$

'e eşittir.

3. **3. problemin çözümü**

Bu problem boyunca, XC'nin stratejilerini (X,Y) olarak düşüneceğiz, öyle ki, X=XC'nin $t_{XC} = iyi$ olduğunda seçtiği eylem, Y=XC'nin $t_{XC} = kotu$ olduğunda seçtiği eylem ve X,Y=R (Reklam), HR (Hiç Reklam). Benzer şekilde, tüketicinin stratejisini (x,y) olarak düşüneceğiz, öyle ki, x=R'yı gözlemlediğindeki eylem, y=HR'yi gözlemlediğindeki eylem ve x,y=S (Satın al), A (satın Alma).

(a) Ekteki grafiğe bakınız.

(b) Ayrık dengeler: Diyelim ki, (R,HR) XC'nin stratejisi olsun. Bu durumda, (S,A) tüketici için en iyi tepkidir ve inanışları da $\{\mu^{R}_{iyi} = 1, \mu^{HR}_{iyi} = 0\}$ şeklindedir. XC'nin (S,A)'ya karşı en iyi tepkisine bakalım. Açıktır ki, eğer $t_{XC} = iyi$ ise R'yi tercih eder, çünkü $R > c$'dir. Eğer $t_{XC} = kotu$ ise, XC, HR'yi tercih eder, çünkü $r - c < 0$'dır. Dolayısıyla, denge $\{(R, HR), (S, A)\}, \{\mu^{R}_{iyi} = 1, \mu^{HR}_{iyi} = 0\}$ şeklindedir.

(c) Bileşik dengeler: Diyelim ki, her iki XC tipi HR oynasınlar. Temsili tüketici sinyallerden yeni birşey öğrenmeyecektir ve inanışları değişmeyecektir. $\{\mu^{HR}_{iyi} = 0.6, \mu^{HR}_{kotu} = 0.4\}$. O zaman, reklam gözlemlemediği durumda, tüketicinin ürünü almaktan elde edeceği beklenen kazancı almamaktan elde edeceğinden daha fazladır: $(0.6)(1)+(0.4)(-1) = 0.2 > 0$. Dolayısıyla, tüketici ürünü alır. Yine de tüketicinin R sinyalini görmesi durumunda neye inanacağını belirtmemiz gerekiyor. Iki tip de dengede bu sinyali göndermediği için, burada Bayez kuralını kullanamıyoruz. Eğer $\mu^R_{iyi} > 0.5$ ise, almayı tercih eder ve $\mu^R_{iyi} < 0.5$ ise almak istemez. Bu durumda, tüketicinin neye inandığından bağımsız olarak, XC çark etmek istemez. Iyi tip, çark etmezse R kazanır, ki bu çark etmesi durumunda kazanacağı $R - c$ ya da $-c$'den (tüketicinin R gördüğünde ne yapacağına göre değişir) daha büyüktür. Kötü tip de benzer şekilde çark etmek istemez, çünkü r, $r-c$ ve $-c$'den büyüktür. Dolayısıyla, dengeler, $\{(HR, HR), (S, S)\}, \{\mu^R_{iyi} > 0.5, \mu^{HR}_{iyi} = 0.6\}$ ve $\{(HR, HR), (A, S)\}, \{\mu^R_{iyi} < 0.5, \mu^{HR}_{iyi} = 0\}$ şeklindedir.

(d) Bu durumda, (b)'deki ayrık denge artık bir denge değildir, çünkü, kötü tip çark etmek isteyecektir ve reklam vererek iyi tipmiş gibi davranacaktır ve 0 yerine $r - c$ kazanacaktır. (c)'deki bileşik dengeler burada da denge olmaya devam ederler. Ancak, her iki tipin de reklam vereceği, yani (R,R), bir bileşik denge daha vardır. Bu durumda, tüketici, reklam gördüğünde yeni birşey öğrenmez ve inanışları değişmez. $\{\mu^R_{iyi} = 0.6, \mu^R_{kotu} = 0.4\}$. Dolayısıyla, S'den edineceği beklenen kazancı, A'dan edineceğinden daha fazladır, $(0.6)(1) + (0.4)(-1) = 0.2 > 0$. Dolayısıyla, reklam gördüğünde almaya karar verir. Tüketici HR sinyalini gördüğünde Bayez kuralını uygulayamıyoruz, çünkü dengede hiçbir tip bu sinyali göndermez. Eğer $\mu^{HR}_{iyi} > 0.5$ ise alır, $\mu^{HR}_{iyi} < 0.5$ ise almaz. Iki tipin de R'den çark etmeyeceği inanışlar kümesinin bulabiliriz. XC'nin çark etmemesi için, tüketicinin HR gördüğünde almaması gerekir. Bunu sağlamak için gerekli olan $\mu^{HR}_{iyi} < 0.5$'tir. Dolayısıyla, denge $\{(R, R), (S, A)\}, \{\mu^R_{iyi} = 0.6, \mu^{HR}_{iyi} < 0.5\}$ şeklindedir.

4. **4. problemin çözümü** (Gibbons, 4.10)

2. oyuncunun stratejisi $v_2 \geq p$ iken almak ve $v_2 < p$ ikense satmaktır.

1. oyuncu içinse:

$$Max_p psPr(v_2 > p) + [v_1 - p * (1 - s)]Pr(v_2 < p)$$

ya da,

$$Max_p ps(1-p) + [v_1 - p*(1-s)]p$$

Birinci dereceden türev bize $p(v_1) = \frac{v_1+s}{2}$ verir.

2. oyuncunun stratejisinin optimal olduğu da açıktır.