14.12 Oyun Teorisi Ders Notları

Muhamet Yıldız

Ders 17-18

1 Eksik Bilgili Statik Uygulamalar

Bu ders notları eksik bilgili ekonomik uygulamalarla ilgilidir. Amacı eksik bilgili statik oyunlarda Bayesyen Nash dengelerini hesaplamak için kullanılan temel teknikleri göstermektir. Bu uygulamalar Gibbons ders kitabında tartışılmıştır. Bu notlar, temel adımları gösterip, bazı önemli detayları açıklamaktadır. Üç uygulamaya bakacağız. Cournot duopoli-sinde, sonlu sayıda tip ve sürekli miktarda eylem olduğunda, Bayesyen Nash dengelerini nasıl hesapladığımızı göstereceğim. Diğer iki uygulama ilk-fiyat ihalesi ve çifte ihale olacak. Bu uygulamalarda, sürekli miktarda eylemler ve sürekli miktarda tipler olacak. Bu durumda, tüm dengeleri hesaplamak kolay değildir ve genellikle bazı fonksiyonel formları olan dengeleri düşünürüz. Burada, (i) simetrik ve lineer, (ii) simetrik ama lineer olmak zorunda olmayan ve (iii) lineer ama simetrik olmak zorunda olmayan dengeleri düşüneceğiz. Simetri ve lineerlikten ne kastettiğimizi, konu oraya gelince açıklayacağız.

1.1 Eksik bilgili Cournot Duopolisi

Alttaki ters-talep fonksiyonlu bir Cournot duopolisi düşünelim

$$P(Q) = a - Q$$

öyle ki, $Q = q_1 + q_2$. Firma 1'in marjinal maliyeti $c = 0$'dır ve bu ortak bilgidir. Firma 2'nin marjinal maliyeti ise c_2'dir ve bu Firma 2 için özel bilgidir. Alabileceği değerler

$$\begin{array}{ll} c_H & \theta \text{ olasılığıyla} \;\; \text{ve} \\ c_L & 1-\theta \text{ olasılığıyla} \end{array}$$

idir. Her firma beklenen karlarını maksimize ederler.

Burada, Firma 1'in tek bir tipi, Firma 2'ninse iki tipi vardır. Dolayısıyla, Firma 1 için strateji bir q_1 reel sayısıdır. Firma 2 içinse bir strateji iki reel sayıdan oluşur, $q_2(c_H)$ ve

$q_2(c_L)$, biri maliyet c_H iken, diğeri de maliyet c_L iken.

Bayesyen Nash Dengesi Şimdi bir Bayesyen Nash dengesi hesaplıyoruz, $(q_1^*, q_2^*(c_H), q_2^*(c_L))$. Her firmanın her tipini ayrı ayrı düşüneceğiz. Öncelikle Firma 2'nin yüksek tipini (c_H) düşünelim. Dengede, bu tip, Firma 1'in q_1^* ürettiğini biliyor. Dolayısıyla, üretim miktarı $q_2^*(c_H)$ alttaki maksimizasyon problemini çözer

$$\max_{q_2}(P - c_H)q_2 = \max_{q_2}[a - q_1^* - q_2 - c_H]\, q_2.$$

Dolayısıyla,

$$q_2^*(c_H) = \frac{a - q_1^* - c_H}{2} \tag{1}$$

Şimdi, Firma 2'nin düşük (c_L) tipini düşünelim. Dengede, bu tip de Firma 1'in q_1^* ürettiğini bilir. Dolayısıyla, üretim miktarı $q_2^*(c_L)$alttaki maksimizasyon problemini çözer

$$\max_{q_2}[a - q_1^* - q_2 - c_L]\, q_2.$$

Dolayısıyla,

$$q_2^*(c_L) = \frac{a - q_1^* - c_L}{2}. \tag{2}$$

Burada önemli olan, her iki tip aynı q_1^*'ı düşünmesidir, ki bu, Firma 2'nin her iki tipi tarafından bilinen Firma 1'in stratejisidir. Şimdi Firma 1'e bakalım. Tek tipi var. Firma 1 Firma 2'nin stratejisini bilmektedir, ama Firma 2'nin hangi tipiyle karşı karşıya olduğunu bilmediğinden, Firma 2'nin üretim miktarını bilmemektedir. Firma 1, Firma 2'nin üretiminin θ olasılıkla $q_2^*(c_H)$, $1-\theta$ olasılıkla ise $q_2^*(c_L)$ olduğuna inanır. Dolayısıyla, alttaki maksimizasyon problemini çözer

$$\begin{aligned}
& \max_{q_1} \theta\,[a - q_1 - q_2^*(c_H)]\, q_1 + (1-\theta)\,[a - q_1 - q_2^*(c_L)]\, q_1 \\
= \; & \max_{q_1} \{a - q_1 - [\theta q_2^*(c_H) + (1-\theta) q_2^*(c_L)]\}\, q_1.
\end{aligned}$$

Eşitlik, Firma 2'nin üretim miktarı q_2, Firma 1'in kazancına, $[a - q_1 - q_2]\, q_1 = [a - q_1]\, q_1 - q_1 q_2$, lineer olarak girmektedir.

$$E[q_2] = \theta q_2^*(c_H) + (1-\theta) q_2^*(c_L)$$

terimi Firma 2'nin beklenen üretim miktarıdır. Dolayısıyla, Firma 1 bu beklenen üretim miktarına bir en iyi tepkiyi oynar. (Bunu ancak ve ancak diğerlerinin eylemleri oyuncunun kazancını lineer bir şekilde etkiliyorsa yapabiliriz.) Dolayısıyla,

$$q_1^* = \frac{a - E\,[q_2]}{2} = \frac{a - [\theta q_2^*(c_H) + (1-\theta) q_2^*(c_L)]}{2}. \tag{3}$$

Bayesyen Nash dengesinin hesaplamak için, (1), (2) ve (3)'te verilen üç lineer denklemi, $q_1^*, q_2^*(c_L), q_2^*(c_H)$ için çözmemiz gerekir. şöyle yazabiliriz

$$\begin{pmatrix} q_1^* \\ q_2^*(c_H) \\ q_2^*(c_L) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \theta & 1-\theta \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ a - c_H \\ a - c_L \end{pmatrix},$$

ve bu bize

$$\begin{aligned} q_2^*(c_H) &= \frac{a - 2c_H}{3} + \frac{(1-\theta)(c_H - c_L)}{6} \\ q_2^*(c_L) &= \frac{a - 2c_L}{3} - \frac{\theta(c_H - c_L)}{6} \\ q_1^* &= \frac{a + \theta c_H + (1-\theta) c_L}{3} \end{aligned}$$

dengesini verir.

1.2 İlk-fiyat ihalesi

Elimizde bir mal var ve iki teklifçi bir müzyedede bu malı almak istiyorlar. Eş zamanlı olarak, her bir teklifçi bir teklifte bulunur, $b_i \geq 0$. Sonra, en yüksek teklif malı kazanır ve kendi teklifini öder. Eğer aynı teklifi verirlerse, o zaman kazananı bir yazı-tura belirler. Bu mal için, i teklifçisinin biçtiği değer v_i'dir ve bu i teklifçisinin özel bilgisidir. Yani, v_i i teklifçisinin tipidir. v_1 ve v_2'nin $[0, 1]$ üzerine tekdüze (uniform) dağılıma tabi ve "bağımsız ve özdeş dağılımlı" olduğunu varsayıyoruz. Kendi biçtiği v_i değerini bilen i teklifçisi, diğer teklifçinin biçtiği değer v_j [0,1] üzerine tekdüze dağılıma tabi olduğunu ve her iki oyuncunun tip kümesinin [0,1] olduğunu bilir. Hatırlarsak, bir oyuncunun diğer oyuncuların tipleri hakkındaki inanışları oyuncunun kendi tipine bağlı olabilir. Bağımsızlık, kendi tipine bağlı olmadığını varsayar.

Burada, eylemler b_i'dirler ve bunlar $[0, \infty)$ eylem uzayından gelirler; tipler v_i'dirler ve bunlar da [0,1] tip uzayından gelirler; inanışlar her tip için [0,1] üzerine tekdüze dağılımlardır. Oyunun tanımını tamamlamak için fayda fonksiyonlarını da belirlememiz gerekir. Fayda fonksiyonları

$$u_i(b_1, b_2, v_1, v_2) = \begin{cases} v_i - b_i & \text{eğer } b_i > b_j, \\ \frac{v_i - b_i}{2} & \text{eğer } b_i = b_j, \\ 0 & \text{eğer } b_i < b_j. \end{cases}$$

şeklinde verilmiştir.

Bir Bayesyen Nash dengesinde, her tip v_i beklenen kazancı b_i'ler üzerinden maksimize eder.

$$E\left[u_i(b_1, b_2, v_1, v_2)|v_i\right] = (v_i - b_i)\Pr\{b_i > b_j(v_j)\} + \frac{1}{2}(v_i - b_i)\Pr\{b_i = b_j(v_j)\} \qquad (4)$$

Şimdi, Bayesyen Nash dengelerini hesaplayacağız. İlk olarak, özel bir dengeye bakacağız. Burada kullanacağımız teknik Bayesyen Nash dengesi hesaplamada kullanılan çok yaygın bir tekniktir, o yüzden adımlara dikkat ediniz.

Simetrik, lineer denge Şimdi simetrik, lineer bir denge hesaplayacağız. Simetrik, her v_i tipinin $b_i(v_i)$ denge eylemleri, tip uzayından eylem uzayına bir b fonksiyonu için

$$b_i(v_i) = b(v_i)$$

şeklinde olduğu anlamına gelir, öyle ki, b her oyuncu için aynı fonksiyondur. Lineer ise b'nin v_i'nin bir lineer fonksiyonu olduğu anlamına gelir, yani,

$$b_i(v_i) = a + cv_i.$$

Simetrik ve lineer dengeyi hesaplamak için alttaki adımları takip ediyoruz.

1. Adım *Bir simetrik denge olduğunu varsayalım:*

$$\begin{aligned} b_1(v_1) &= a + cv_1 \\ b_2(v_2) &= a + cv_2 \end{aligned}$$

tüm tipler v_1 ve v_2 için, bazı sabitler a ve c için, ki bu sabitler sonra bulunacaktır. Burada önemli olan bu sabitler oyunculara ya da tiplerine bağlı değildir.

2. Adım *Her tip icin en iyi tepki fonksiyonunu hesaplayalım.* Bir v_i tipini sabitleyelim. Bu tipin en iyi tepkisini hesaplamak için, önce farkedelim ki $c > 0$. [Bu çok açık değildir; Gibbons'ı okuyup düşünmeniz gerekir.] O zaman, herhangi bir sabitlenmiş b_i değeri için, 1. Adımdan dolayı b_j, v_j'de kesin artan olduğundan

$$\Pr\{b_i = b_j(v_j)\} = 0. \tag{5}$$

Aynı zamanda da $a \leq b_i\,(v_i) \leq v_i$'dir. [Yine, bunu açıklamanız gerekir.] Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} E\left[u_i(b_1, b_2, v_1, v_2)|v_i\right] &= (v_i - b_i)\Pr\{b_i \geq a + cv_j\} \\ &= (v_i - b_i)\Pr\{v_j \leq \frac{b_i - a}{c}\} \\ &= (v_i - b_i) \cdot \frac{b_i - a}{c}. \end{aligned}$$

Burada, ilk eşitlik (5)'i (4)'te yerine koymakla bulunur. İkinci eşitlik basit cebir işlemleridir ve üçüncü eşitlik v_j'nin [0,1] üzerine tekdüze (uniform) dağılmış olmasından gelir. [Eğer bu dersi alıyorsaız, son adım sizin için açık olmalıdır.] En iyi tepkiyi hesaplamak için, son ifadeyi b_i'ye göre maksimize etmeliyiz. Türevi alıp sıfıra eşitleyince

$$b_i = \frac{v_i + a}{2} \tag{6}$$

elde ederiz.

3. Adım *En iyi tepki fonksiyonlarının gerçekten lineer olduklarını gösterelim*, yani., b_i, $b_i = a + cv_i$ şeklindedir. (6)'yı tekrar yazarsak

$$b_i = \frac{1}{2}v_i + \frac{a}{2}. \tag{7}$$

elde ederiz. Hem 1/2'nin hem de $a/2$'nin sabit olduklarını kontrol edelim, yani, v_i'ye bağlı değiller ve her iki oyuncu için de aynılar.

4. Adım *a ve c sabitlerini hesaplayalım.* Bunu yapmak için, bir denge olabilmesi için (6)'daki en iyi tepkinin, b_i'nin $b(v_i)$'ye eşit olması gerektiğini görüyoruz:

$$b_i = b\,(v_i)\,,$$

ya da

$$\frac{1}{2}v_i + \frac{a}{2} = cv_i + a.$$

Bu bir eşitlik olmalı, yani, tüm v_i değerleri icin doğru olmalı. Dolayısıyla, v_i'nin katsayısı her iki tarafta da eşit olmalı:

$$c = \frac{1}{2}.$$

Kesen de her iki tarafta aynı olmalı.

$$a = \frac{a}{2}.$$

Dolayısıyla,

$$a = 0.$$

Bu bize simetrik ve lineer Bayesyen Nash dengesini verir.

$$b_i\left(v_i\right) = \frac{1}{2}v_i.$$

Herhangi bir simetrik denge Şimdi, b'nin lineer olduğunu varsaymadan, simetrik bir Bayesyen Nash dengesi hesaplayacağız. b'nin kesin artan ve türevlenebilir olduğunu varsayıyoruz.

1. Adım *Alttaki gibi bir Bayesyen Nash dengesi olduğunu varsayalım*

$$\begin{aligned} b_1\left(v_1\right) &= b\left(v_1\right) \\ b_2\left(v_2\right) &= b\left(v_2\right) \end{aligned}$$

kesin artan ve türevelenebilir bir b fonksiyonu için.

2. Adım *Her tipin en iyi tepki fonksiyonunu hesaplayalım, veya en iyi tepkinin sağlayacağı birinci dereceden türevleri hesaplayalım.* Bu noktada, j oyuncusunun denge stratejisine göre oynadığı verili iken, v_i tipinin b_i oynamaktan elde edeceği beklenen değerin

$$\begin{aligned} E\left[u_i\left(b_1, b_2, v_1, v_2\right)|v_i\right] &= \left(v_i - b_i\right)\Pr\{b_i \geq b(v_j)\} \\ &= \left(v_i - b_i\right)\Pr\{v_j \leq b^{-1}\left(b_i\right)\} \\ &= (v_i - b_i)b^{-1}\left(b_i\right), \end{aligned}$$

olduğunu hesaplayalım, öyle ki, b^{-1}, b'nin tersidir. Burada, ilk eşitlik b'nin kesin artan fonksiyon olmasından dolayı sağlanır; ikinci eşitlik yine b'nin artan olmasından kaynaklıdır ve son eşitlik v_j'nin [0,1] üzerine tekdüze (uniform) dağılmış olmasından gelir. Birinci dereceden türev bu son terimin b_i'ye göre kısmi türevi alınıp sıfıra eşitlenerek elde edilir. Karışıklığa mahal vermemek için, en iyi tepki için b_i^* yazalım. Bu durumda, birinci dereceden türev

$$-b^{-1}\left(b_i^*\right) + \left(v_i - b_i^*\right) \left.\frac{db^{-1}}{db_i}\right|_{b_i=b_i^*} = 0.$$

idir. Bunu, ters fonksiyonun türev formulünü kullanarak, alttaki gibi tekrar yazabiliriz.

$$-b^{-1}\left(b_i^*\right) + \left(v_i - b_i^*\right) \left.\frac{1}{b'\left(v\right)}\right|_{b(v)=b_i^*} = 0. \tag{8}$$

3. Adım *En iyi tepkiyi denge eylemleriyle belirleyelim*, denge eylemlerini hesaplamay yönelik olarak. Yani,

$$b_i^* = b\left(v_i\right)$$

olsun. Bunu (8)'de yerine koyarsak

$$-v_i + \left(v_i - b\left(v_i\right)\right)\frac{1}{b'\left(v_i\right)} = 0 \tag{9}$$

elde ederiz. Basit cebir ile,

$$b'\left(v_i\right)v_i + b\left(v_i\right) = v_i.$$

Dolayısıyla,

$$\frac{d\left[b\left(v_i\right)v_i\right]}{dv_i} = v_i.$$

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} b\left(v_i\right)v_i &= v_i^2/2 + const. \\ b\left(v_i\right) &= v_i/2 + const/v_i. \end{aligned}$$

$b\left(0\right) \neq \infty$ olduğundan, *const*$= 0$ olmalı. Dolayısyla,

$$b\left(v_i\right) = v_i/2.$$

Bu durumda, şanslıyız. Genel olarak, (9)'daki gibi bir diferansiyel denklem elde edilir, ama denklem genelde kolay çözülebilir bir denklem değildir. Diferansiyel denklemi bulana kadar geçtiğimiz adımları iyice anladığınızdan emin olunuz.

2 Çifte İhale

Şimdi bir çifte müzayede düşünüyoruz. Terim müzayedeye atıfta bulunsa da, bu aslında basit bir pazarlık problemidir. Bir mala sahip bir Satıcımız, bir de Alıcımız var. Malın alışverişini sıradaki mekanizmayla gerçekleştiriyorlar. Eş zamanlı olarak, Satıcı bir p_s fiyatı anons eder, Alıcı da bir p_b fiyatı anons eder.

- Eğer $p_b < p_s$ ise, alışveriş olmaz;
- Eğer $p_b \geq p_s$ ise, o zaman $p = \frac{p_b+p_s}{2}$ fiyatında alışveriş gerçekleşir.

Malın değeri Satıcı için v_s, Alıcı içinse v_b'dir. Her oyuncu, mala biçtiği değeri özel olarak bilmektedir. v_s ile v_b'nin [0,1] üzerine tekdüze (uniform) dağılıma tabi bağımsız ve özdeş dağılımlı olduğunu varsayıyoruz. [Ilk-fiyat müzayedesinden bunun ne anlama geldiğini hatırlayınız.] O zaman, kazançlar

$$
\begin{aligned}
u_b &= \begin{cases} v_b - \frac{p_b+p_s}{2} & \text{eğer } p_b \geq p_s \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \\
u_s &= \begin{cases} \frac{p_b+p_s}{2} - v_s & \text{eğer } p_b \geq p_s \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

Şimdi Bayesyen Nash dengesini hesaplayacağız. Bir dengede, satıcının her v_s tipi icin bir $p_s(v_s)$ fiyatı ve alıcının her v_b tipi için bir $p_b(v_b)$ fiyatı olacaktır. Bir Bayesyen Nash dengesinde $p_b(v_b)$

$$\max_{p_b} E\left[v_b - \frac{p_b + p_s(v_s)}{2} : p_b \geq p_s(v_s)\right]$$

maksimzaysyon problemini çözer. $p_s(v_s)$ de

$$\max_{p_s} E\left[\frac{p_s + p_b(v_b)}{2} - v_s : p_b(v_b) \geq p_s\right]$$

maksimizasyon problemini çözer, öyle ki, $E[x : A]$ x'in A kümesi üzeindeki integralidir. ($E[x : A] = E[x|A] \Pr(A)$ idir, öyle ki, $E[x|A]$, A verili iken, x'in koşullu beklentisidir. Tüm bu terimleri bildiğinizden emin olunuz!!!)

Bu oyunda, birçok Bayesyen Nash dengesi vardır. Mesela, bir denge altta verilmiştir.

$$
\begin{aligned}
p_b &= \begin{cases} X & \text{if } v_b \geq X \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \\
p_s &= \begin{cases} X & \text{if } v_s \leq X \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}
$$

bir $X \in [0,1]$ sabit sayısı için. Şimdi lineer stratejili Bayesyen Nash dengelerine bakacağız.

Lineer stratejili dengeler Stratejilerin biçilen değerlerin lineer fonksiyonları olduğu, ama simetrik olmak zorunda olmadıkları bir dengeyi düşüneceğiz.

1. Adım *Lineer stratejili bir dengemiz olduğunu varsayalım:*

$$
\begin{aligned}
p_b(v_b) &= a_b + c_b v_b \\
p_s(v_s) &= a_s + c_s v_s
\end{aligned}
$$

bazı a_b, c_b, a_s ve c_s sabitleri için. $c_b > 0$ and $c_s > 0$ olduğunu da varsayıyoruz. [a ve c alıcı ve satıcı için farklı olabilir.]

2. Adım *Her tip için en iyi tepkiyi hesaplayalim.* Bunu yapmak için, ilk olarak,

$$
p_b \geq p_s(v_s) = a_s + c_s v_s \iff v_s \leq \frac{p_b - a_s}{c_s} \tag{10}
$$

ve

$$
p_s \leq p_b(v_b) = a_b + c_b v_b \iff v_b \geq \frac{p_s - a_b}{c_b} \tag{11}
$$

olduğunu görelim. Şimdi, bir v_b tipi için en iyi tepkiyi hesaplayacağız. Satıcının verili denge stratejisine göre oynadığını kabul edersek, p_b oynamaktan edineceği kazanç

$$
\begin{aligned}
E\left[u_b\left(p_b, p_s, v_b, v_s\right)|v_b\right] &= E\left[v_b - \frac{p_b + p_s(v_s)}{2} : p_b \geq p_s(v_s)\right] \\
&= \int_0^{\frac{p_b - a_s}{c_s}} \left[v_b - \frac{p_b + p_s(v_s)}{2}\right] dv_s,
\end{aligned}
$$

öyle ki, son eşitlik (10)'u kullanarak elde edilmiştir. $p_s(v_s) = a_s + c_s v_s$'yi burada yerine koyarsak,

$$E\left[u_b\left(p_b, p_s, v_b, v_s\right)|v_b\right] = \int_0^{\frac{p_b - a_s}{c_s}} \left[v_b - \frac{p_b + a_s + c_s v_s}{2}\right] dv_s.$$

elde ederiz. Basit cebir işlemlerinden sonra, [1] bu eşitlik

$$E\left[u_b\left(p_b, p_s, v_b, v_s\right)|v_b\right] = \frac{p_b - a_s}{c_s}\left(v_b - \frac{3p_b + a_s}{4}\right).$$

şeklini alır. En iyi tepkiyi bulmak için, son ifadenin p_b'ye göre türevini alıyoruz ve sıfıra eşitliyoruz. Bu bize

$$\frac{1}{c_s}\left(v_b - \frac{3p_b + a_s}{4}\right) - \frac{3(p_b - a_s)}{4c_s} = 0$$

eşitliğini verir. p_b icin bu eşitliği çözünce,

$$p_b = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{3}a_s \tag{12}$$

elde ederiz.

Şimdi, bir v_s tipi icin en iyi tepkiyi hesaplıyoruz. Önceden olduğu gibi, p_s oynamaktan dengede edineceği beklenen değeri

$$\begin{aligned} E\left[u_s\left(p_b, p_s, v_b, v_s\right)|v_s\right] &= E\left[\frac{p_s + p_b(v_b)}{2} - v_s : p_b(v_b) \geq p_s\right] \\ &= \int_{\frac{p_s - a_b}{c_b}}^{1} \left[\frac{p_s + a_b + c_b v_b}{2} - v_s\right] dv_b, \end{aligned}$$

idir, öyle ki, son eşitlk (11)'den ve $p_b(v_b) = a_b + c_b v_b$'den gelir. Bir miktar basit cebir

---

[1] İntegrali

$$\begin{aligned} & \frac{p_b - a_s}{c_s}\left(v_b - \frac{p_b + a_s}{2}\right) - \frac{c_s}{2}\int_0^{\frac{p_b - a_s}{c_s}} v_s dv_s \\ = & \frac{p_b - a_s}{c_s}\left(v_b - \frac{p_b + a_s}{2}\right) - \frac{c_s}{4}\left(\frac{p_b - a_s}{c_s}\right)^2 \\ = & \frac{p_b - a_s}{c_s}\left(v_b - \frac{p_b + a_s}{2} - \frac{p_b - a_s}{4}\right) \\ = & \frac{p_b - a_s}{c_s}\left(v_b - \frac{3p_b + a_s}{4}\right) \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz.

işleminden sonra,[2] bu

$$E\left[u_s\left(p_b,p_s,v_b,v_s\right)|v_s\right]=\left(1-\frac{p_s-a_b}{c_b}\right)\left[\frac{3p_s+a_b}{4}-v_s+\frac{c_b}{4}\right]$$

şeklini alır. Tekrardan, en iyi tepkiyi hesaplamak icin, son ifadenin p_s'ye göre türevini alıp sıfıra eşitliyoruz. Bu bize

$$-\frac{1}{c_b}\left[\frac{3p_s+a_b}{4}-v_s+\frac{1}{4}\right]+\frac{3}{4}\left(1-\frac{p_s-a_b}{c_b}\right)=0,$$

verir, ya da denk olarak

$$-\left[\frac{3p_s+a_b}{4}-v_s+\frac{c_b}{4}\right]+\frac{3}{4}\left(c_b-(p_s-a_b)\right)=0.$$

verir. p_s için çözersek,

$$\frac{3p_s}{2}=-\frac{a_b}{4}+v_s-\frac{c_b}{4}+\frac{3}{4}\left(c_b+a_b\right)=v_s+\frac{a_b+c_b}{2}$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$p_s=\frac{2}{3}v_s+\frac{a_b+c_b}{3}. \tag{13}$$

3. Adım *En iyi tepki fonksiyonlarının 1. adımda varsayıldığı şekilde olduklarını gösterelim* (12) ve(13)'e bakınca, bunun doğru olduğunu görebiliriz. Burada önemli olan (12)'deki 2/3 çarpanının ve $\frac{1}{3}a_s$ keseninin sabit oldukları ve v_b'den bağımsız olduklarını kontrol etmektir. Benzer şekilde (13)'teki çarpan ve kesenlerini de kontrol etmek gerekir.

4. Adım *Sabitleri hesaplayalım* Bunu yapmak için, en iyi tepkilerdeki çarpanları ve kesenleri 1. adımdaki sabitlerle belirliyoruz. İlk olarak, (12) ve (13) sayesinde, alttaki

[2] İntegrali

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{p_s-a_b}{c_b}\right)\left[\frac{p_s+a_b}{2}-v_s\right]+\frac{c_b}{2}\int_{\frac{p_s-a_b}{c_b}}^{1}v_b dv_b\\
=\ &\left(1-\frac{p_s-a_b}{c_b}\right)\left[\frac{p_s+a_b}{2}-v_s\right]+\frac{c_b}{4}\left(1-\left(\frac{p_s-a_b}{c_b}\right)^2\right)\\
=\ &\left(1-\frac{p_s-a_b}{c_b}\right)\left[\frac{p_s+a_b}{2}-v_s+\frac{c_b}{4}+\frac{p_s-a_b}{4}\right]\\
=\ &\left(1-\frac{p_s-a_b}{c_b}\right)\left[\frac{3p_s+a_b}{4}-v_s+\frac{c_b}{4}\right]
\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz.

denkliği buluyoruz

$$a_b + c_b v_b = \frac{1}{3}a_s + \frac{2}{3}v_b.$$

Yani,

$$a_b = \frac{1}{3}a_s \tag{14}$$

ve

$$c_b = \frac{2}{3}. \tag{15}$$

Benzer şekilde, (13) ve $p_s(v_s) = p_s$'den dolayı alttaki denkliği buluyoruz

$$a_s + c_s v_s = \frac{a_b + c_b}{3} + \frac{2}{3}v_s.$$

Yani,

$$a_s = \frac{a_b + c_b}{3} \tag{16}$$

ve

$$c_s = \frac{2}{3}. \tag{17}$$

(14),(15),(16) ve (17)'yi çözünce, $a_b = 1/12$ and $a_s = 1/4$ elde ederiz.

Dolayısıyla, lineer Bayesyen Nash dengesi

$$p_b(v_b) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{12} \tag{18}$$

$$p_s(v_s) = \frac{2}{3}v_s + \frac{1}{4} \tag{19}$$

şeklindedir.

Bu dengede, alışveriş olacaktır ancak ve ancak

$$p_b(v_b) \geq p_s(v_s)$$

ancak ve ancak

$$\frac{2}{3}v_b + \frac{1}{12} \geq \frac{2}{3}v_s + \frac{1}{4}$$

ancak ve ancak

$$v_b - v_s \geq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{6} = \frac{1}{4}.$$