14.12 Oyun Teorisi

Muhamet Yıldız

Güz 2005

Sınav 2 Çözümleri

1. sorunun çözümü

Bu oyunun iki tane alt-oyunu var. Bir tanesi oyunun kendisi, diğeri de 1. ve 2. oyuncular, sırasıyla R ve r oynadıktan sonraki alt-oyundur. Bu ikinci alt-oyunda, iki tane saf stratejili Nash dengesi (ND) vardır, (A,a) ve (B,b).

Alt-oyun tam dengeyi (ATD) hesaplamak için, strateji vektörünün her alt oyunda bir ND olduğunu kontrol etmeliyiz. Dolayısıyla, ATD elde etmek için, küçük alt-oyunun sonucunun o iki ND'den biri olacağını varsaymamız gerekir.

Oyuncular, küçük alt-oyunda (A,a) oynadıklarında, indirgenmiş oyun

$$\begin{array}{ccc} & l & r \\ L & 3,1 & 2,0 \\ R & 2,0 & 3,3 \end{array}$$

şeklindedir.

Bu durumda iki tane ND var: (L,l) ve (R,r). Dolayısıyla, ATDler (LA,la) ve (RA,ra)'dırlar.

Kücük alt-oyunda (B,b) oynadıklarındaysa, indirgenmiş oyun

$$\begin{array}{ccc} & l & r \\ L & 3,1 & 2,0 \\ R & 2,0 & 1,1 \end{array}$$

şeklindedir.

Bu durumda sadece bir tane ND var: (L,l). Dolayısıyla, ATD, (LB,lb)dir.

Dolayısıyla, oyunun üç tane ATD'si var: (LA,la), (RA,ra) ve (LB,lb).

2. sorunun çözümü

1. (a) Bu bir ATD değil çünkü ceza modunda her oyuncu çark edip M yerine L oynamak ister ve bu periyottaki kazancını 3'ten 7'ye arttırır. Bunun gelecek periyotlara bir etkisi yoktur çünkü bir sonraki periyot otomatik olarak ortaklık moduna geçilecektir, ceza modunda oyuncular ne oynarlarsa oynasınlar.

   (b) bu bir ATDdir. Eğer i oyuncusu denge stratejisine uyarsa, o zaman her periyot 6 alır. Bunun bugünkü değeri $6/(1-\delta)$'dir. Eğer oyuncu çark ederse ve M oynamayı seçerse, şu anki periyot 8 kazanır ve oyun bir periyotluğuna ceza moduna geçer ve o periyot 6 kazanır. Bundan sonra oyun ceza moduna geri döner ve i oyuncusu sonsuza kadar 6 alacak. Dolayısıyla, toplam iskontolu kazancı $8+\delta 2+\delta^2 6/(1-\delta)$'dır. Dolayısıyla, çark etme eğilimi yoktur ancak ve ancak

   $$6/(1-\delta) \geq 8+\delta 2+ +\delta^2 \frac{6}{1-\delta} \Leftrightarrow 6+6\delta \geq 8+\delta 2 \Leftrightarrow \delta \geq 1/2$$

   Ceza modunda, eğer i oyuncusu kendi stratejisine uyarsa, bu periyotta 2 kazanır ve sonrasında da her periyot 6 alır. Eğer i oyuncusu çark eder ve H ya da M oynarsa, bu periyot 0 kazanır ve sonrasında da her periyot 6 kazanır, çünkü oyun, ceza modunda ne seçerlerse seçsinler, ortaklık moduna geçer. Dolayısıyla, i oyuncusunun çark etmek için bir eğilimi yoktur. Dolayısıyla, $\delta = 0.99 > 1/2$ olduğundan, bu strateji vektörü ATDdir.

3. sorunun çözümü

Önce ortaklıktan gelecek ve diğer firmalar ortaklık yaparken çark etmekten gelecek toplam karlar altta verilmiştir:

Eğer her firma $1/2n$ üretirse, $P = 1 - n(1/2n) = 1/2$.

Dolayısıyla, her firmanın karı= $(1/2n)(1/2-0) = 1/4n$.

Eğer $n-1$ firma $(1/2n)$ birim üretirse, $n-1$. firma için kar maksimize eden üretim miktarı

$$\arg\max_q \left\{1-(n-1)\left(\frac{1}{2n}\right)-q-0\right\}q$$

$$=\frac{n+1}{4n}$$

Dolayısıyla, firmanın en karlı çarktan edineceği kar $= ((n+1)/4n)^2$'dir.

Şimdi, ceza modundan gelecek ve her firma x üretirken çark etmekten gelecek toplam karları hesaplayalım.

Eğer her firma x üretirse, $P = 1 - nx$'dir.

Her firmanın karı $= (1-nx)x$.

Eğer $n-1$ firma x birim üretirse, $n-1$. firma için kar maksimize eden üretim miktarı

$$\arg\max_q \{1-(n-1)\,x-q\}\,q$$

$$=\frac{1-(n-1)\,x}{2}$$

Dolayısıyla, firmanın en karlı çarktan edineceği kar $= [1-(n-1)x/2]^2$'dir.

Şimdi, ceza ve ortaklık modlarındaki tek periyotlu çarkların karlı olması için gerekli koşulları yazabiliriz.

Ortaklık modunda, çark etmekten gelen kazanım

$$=\left(\frac{n+1}{4n}\right)^2-\frac{1}{4n}$$

ve bir sonraki periyottaki cezadan gelecek kayıp

$$= \frac{1}{4n} - (1 - nx)\,x$$

Dolayısıyla, böyle bir çarkın kazançlı olmaması için,

$$\left(\frac{n+1}{4n}\right)^2 - \frac{1}{4n} \leq \delta \left[\frac{1}{4n} - (1 - nx)\,x\right]$$

gerekli.

Ceza modunda, çarktan gelen kazanç

$$= \left[\frac{1 - (n-1)\,x}{2}\right]^2 - (1 - nx)\,x$$

ve bir sonraki periyottaki cezadan gelecek kayıp

$$= \frac{1}{4n} - (1 - nx)\, x$$

Dolayısıyla, böyle bir çarkın kazançlı olmaması için,

$$\left[\frac{1 - (n-1)\, x}{2}\right]^2 - (1 - nx)\, x \leq \delta \left[\frac{1}{4n} - (1 - nx)\, x\right]$$

gerekli.

Bu verili strateji vektörü alt-oyun tam dengedir ancak ve ancak bu iki eşitsizlik sağlanırsa.

4. sorunun çözümü

1. (a) Tek periyotluk oyun için, diyelim ki, 1. oyuncu teklif veren olarak seçilmiş olsun. 2. oyuncu teklifi reddederse 0 alır. Dolayısıyla, 0'dan büyük eşit herhangi bir teklifi kabul edecektir.

   Dolayısıyla, 1. oyuncu (1,0) teklifini verir.

   Benzer şekilde, eğer 2. oyuncu teklif veren olarak seçilmişse 1. oyuncu 0'dan büyük eşit herhangi bir teklifi kabul edecektir.

   Dolayısıyla, 2. oyuncu (0,1) teklifini verir.

   Dolayısıyla, her oyuncu için, teklif veren olarak seçilmenin değeri 1'dir; ve seçilmemenin değeri 0'dır. Dolayısıyla, seçim yapılmadan önce, 1. oyuncu için beklenen değer $p(1) + (1-p)0 = p$ ve 2. oyuncu için beklenen değer $p(0) + (1-p)1 = 1 - p$'dir.

   (b) Iki periyotluk oyun için, diyelim ki 1. oyuncu $t = 1$'de seçilmiş olsun. Eğer 2 reddederse $(1-p)$'lik bir 1. periyottan gelecek beklenen değeri olacak ((a)'da hesaplandığı üzere) ve bu δ ile iskonto edilecektir. Dolayısıyla,

$t = 1$'de, 2. oyuncu kendisine en az $\delta(1-p)$ kadar kazanç veren her teklifi kabul edecektir. Dolayısıyla, 1. oyuncu $(1 - \delta(1-p), \delta(1-p))$ önerir.

Benzer şekilde, eğer $t = 1$ periyodunda 2. oyuncu seçildiyse, 1. oyuncu kendisine en az δp kadar kazanç veren her teklifi kabul edecektir. Dolayısıyla, 2. oyuncu $(1 - \delta p, \delta p)$ önerir.

Dolayısıyla, 1. oyuncu $t = 1$'de seçilirse $1 - \delta(1 - p)$, seçilmezse δp kazanır. Dolayısıyla, $t = 1$'de seçim yapılmadan önce, 1. oyuncu için oyunun bekenen kazancı $p[1-\delta(1-p)] + (1-p)\delta p$ olur ve bu p'ye eşittir.

Benzer şekilde, 2. oyuncu $t = 1$'de seçilirse $1 - \delta p$, seçilmezse $\delta(1 - p)$ kazanır. Dolayısıyla, $t = 1$'de seçim yapılmadan önce, 2. oyuncu için oyunun bekenen kazancı $(1 - p)[1 - \delta p] + p[\delta(1 - p)]$ olur ve bu $1 - p$'ye eşittir.

(c) (a) ve (b)'deki yanıtlardan hareketle, alttaki strateji vektörü mantıklı bir alt-oyun tam denge adayı olacak gibidir: Seçildiyse, 1. oyuncu $(1 - \delta(1-p), \delta(1-p))$ önerir; kabul etmesi/reddetmesi gerektiğinde, 1. oyuncu ancak ve ancak teklif kendisine δp ve ya daha fazla önerirse kabul eder. Seçildiyse, 2. oyuncu $(1-\delta p, \delta p)$ önerir; kabul etmesi/reddetmesi gerektiğinde, 2. oyuncu ancak ve ancak teklif kendisine $\delta(1 - p)$ ve ya daha fazla önerirse kabul eder. Bu strateji vektörü için, kim seçilirse seçilsin, yapılan teklif hemen kabul edilir. (b)'de olduğu gibi, herhangi bir periyotta, teklif veren seçilmeden önce, beklenen değer 1. oyuncu için p, 2. oyuncu içinse $(1 - p)$'dir.

Tek çark prensibini kullanarak, bu strateji vektörünün alt-oyun tam denge olduğunu gösteriyoruz. Eğer seçildiyse, 1. oyuncu 2. oyuncuya daha küçük ya da daha büyük bir miktar teklif ederek çark edebilir. Açıktır ki, daha büyük bir teklif kabul edilecektir ve 1. oyuncuya daha düşük bir kazanç bırakır. Dolayısıyla, böyle bir çark kazançlı değildir. Daha küçük bir teklif reddedilir, 2. oyuncunun stratejisine göre; dolayısıyla oyun 2. periyoda uzar, 1. oyuncuya δp'lik bir beklenen değer verecektir, oyuncuların o andan itibaren orijinal stratejilerine sadık kalacaklarını varsayarsak. Şimdi, $\delta p < (1 - \delta) + \delta p = 1 - \delta(1 - p)$, ve bu son ifade 1. oyuncunun 1. oyuncunun çark etmemesi halindeki kazancıdır. Dolayısıyla, bu tip bir çark kazançlı değildir. Ayrıca, 1. oyuncu bir teklifi reddederse kazanacağı beklenen değer δp olduğundan, $x \geq \delta p$ veya $y < \delta p$ şeklindeki teklifleri reddetmek kazançlı bir çark değildir. Aynı şekilde, 2. oyuncu için de kazançlı bir tek periyotluk çark olmadığını gösterebiliriz (yukarıdaki mantık dizgesinde p'yi $q = 1 - p$ ile yer değiştirerek). Dolayısıyla, tek çark prensibini kullanarak, bu strateji vektörünün bir alt-oyun tam denge olduğunu göstermiş olduk.

(d) (c)'deki analizden biliyoruz ki, yatırımlar yapıldıktan sonra, iki oyuncu için,sırasıyla, beklenen değerler p ve δp'dir. Dolayısıyla, yatırımlar yapılmadan önce, 1. oyuncunun kazancı $p - x = x/(x+y) - x$, 2. oyuncunun ki ise $(1-p) - x = y/(x+y) - y$'dir.

Bir alt-oyun tam denge için, öyle x ve y yatırım miktarları bulmalıyız ki, oyuncular çark etmesin. y veriliyken, 1. oyuncu için optimal yatırım miktarı

$$\max_x \left(\frac{x}{x+y} \right) - x$$

idir. Birinci türev

$$\begin{aligned} &\frac{y}{(x+y)^2} - 1 = 0 \\ &\implies y = (x+y)^2 \qquad (1) \end{aligned}$$

verir. Benzer şekilde, x veriliyken, 2. oyuncunun optimal yatırım miktarı

$$\max \left(\frac{y}{x+y} \right) - y$$

idir. Birinci türev

$$\frac{x}{(x+y)^2} - 1 = 0$$
$$\implies x = (x+y)^2 \qquad (2)$$

verir. (1) ve (2)'yi sağlamak için, $x = y = 1/4$ olmalıdır. Dolayısıyla, dengede, her iki oyuncu 1/4 miktarında bir yatırım yapar ve oyunun devamımnda (c)'deki stratejileri kullanırlar.