8. Yakınsak Diziler

8.1. Yakınsaklık

Geçmişte $(n/(n+1))_n$ dizisinin 1'e yakınsadığını fısıldadık ama kanıtlamadık. Kanıtlayamazdık da, çünkü yakınsamak kavramını henüz tanımlamadık. Bu bölümde matematikte çok önemli olan yakınsamak kavramını son derece dikkatli tanımlayacağız, en azından kesirli sayılardaki yakınsaklık kavramını.

Bir dizinin bir sayıya yakınsaması demek, dizinin terimlerinin belli bir göstergeçten, yani bir zaman sonra, yani belli bir terimden sonra o sayıya çok çok ama çok çok yakın olması demektir. Dizinin terimleri hiçbir zaman o sayıya eşit olmayabilir, ama o sayıya dizinin terimleriyle **dilediğimiz kadar** yaklaşabilmeliyiz ve bu yakınlık belli bir göstergeçten sonra **hep**, yani belli bir sayıdan büyük **her** göstergeç için geçerli olmalı...

Örnek. $(n/(n+1))_n$ dizisinin 1'e yakınsaması gerektiğini çok büyük bir n sayısı alarak tahmin edebiliriz. Örneğin, $n = 999$ alırsak,

$$n/(n+1) = 0{,}999$$

buluruz; $n = 99.999$ alırsak,

$$n/(n+1) = 0{,}99999$$

buluruz; n büyüdükçe dizinin terimleri daha çok 1'e yaklaşırlar. Aslında bu dizinin terimleri 2'ye de yaklaşıyorlar, ama 1'e yaklaşmaktan da öte, 1'e yaslanıyorlar, sokuluyorlar, nerdeyse 1'in içine girecekler.

Matematiksel tanımı daha sonraya bırakarak, sanki tanımı biliyormuş gibi $(n/(n+1))_n$ dizisinin 1'e yakınsadığını gösterelim.

Herhangi bir pozitif kesirli sayı alalım. ε (epsilon) diyelim bu sayıya. ε'u çok küçük bir sayı olarak düşünün. Zaten matematikte ε, genellikle, çok çok küçük ama gene de pozitif bir sayı anlamına gelir; aynen x'in bilinmeyen, n'nin tamsayı, p'nin asal sayı anlamına kullanıldığı gibi.

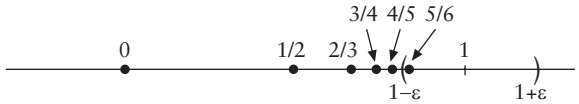
Evet... Çok çok küçük bir ε pozitif kesirli sayısı verilmiş. Öyle bir N doğal sayısı bulacağız ki, eğer $n > N$ ise, o zaman dizinin $n/(n+1)$ teriminin 1'e olan uzaklığı en fazla bu ε kadar olacak, yani her $n > N$ doğal sayısı için,

$$|n/(n+1) - 1| < \varepsilon$$

ya da

$$n/(n+1) \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$$

olacak. (İki koşul birbirine denktir elbette.)



Demek ki rasgele bir $\varepsilon > 0$ kesirli sayısı verilmiş ve biz yukardaki koşulu sağlayan bir N doğal sayısı arıyoruz.

$$|n/(n+1) - 1| < \varepsilon.$$

koşulunun doğru olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulmaya çalışacağız.

Örneğin $\varepsilon = 0{,}01$ ise ve n'yi 3 alırsak yukardaki eşitsizlik sağlanmaz. n'yi 4, 5, 6 alırsak da sağlanmaz. $n = 99$'da tam eşitlik bulunur. Ama $n > 99$ ise eşitsizlik sağlanır.

Eğer $|n/(n+1) - 1| < \varepsilon$ eşitsizliğinin sol tarafında paydaları eşitleyip sadeleştirirsek, koşul,

$$|1/(n+1)| < \varepsilon.$$

haline ya da

$$1 < \varepsilon(n+1).$$

haline gelir. Şimdi N'yi,

$$1 < \varepsilon N.$$

eşitsizliğini sağlayan herhangi bir N doğal sayısı olarak seçelim. $\mathbb{Q}$, Arşimet özelliğini sağladığından (Teorem 6.11) bu özelliği sağlayan bir N vardır. N'yi bulduk. Son bir kez kontrol edelim: Eğer $n > N$ ise, o zaman

$$|n/(n+1) - 1| = 1/(n+1) < 1/N < \varepsilon.$$

Demek ki bu N gerçekten istediğimizi veriyor.

Şimdi bir dizinin bir sayıya yakınsamasının ne demek olduğunu matematiksel olarak tanımlayalım.

Tanım. *$(x_n)_n$ bir kesirli sayı dizisi olsun. $a \in \mathbb{Q}$ olsun. Eğer her pozitif ε kesirli sayısı için,*

$$n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \qquad (*)$$

önermesini sağlayan bir N doğal sayısı varsa, o zaman, $(x_n)_n$ dizisi (n sonsuza giderken) a'ya ***yakınsar*** *ya da a, $(x_n)_n$ dizisinin* ***limiti****dir denir.*

Aslında x_n ve a, kesirli sayılar olduklarından sadece "yakınsar" yerine "kesirli sayılarda yakınsar" dememiz gerekirdi, ama bu sayımızda hep bu kavramı kullanacağımızdan bu nitelemeye ihtiyacımız olmayacak.

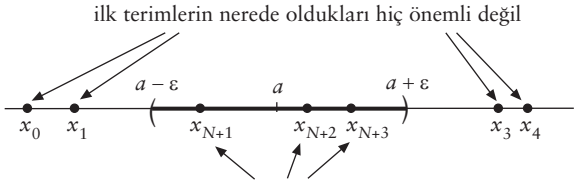
Tanıma göre, $(x_n)_n$ dizisinin a'ya yakınsaması için, her $\varepsilon > 0$ kesirli sayısı için öyle bir N bulmalıyız ki, her $n > N$ doğal sayısı için

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliği doğru olsun. Bir başka deyişle, $(x_n)_n$ dizisinin a'ya yakınsaması için, her $\varepsilon > 0$ için,

$$\{n : |x_n - a| \geq \varepsilon\}$$

kümesi sonlu olmalı (ki bir zaman sonra **hep** $|x_n - a| < \varepsilon$ olsun).



ama belli bir N göstergecinden sonra
(ya da belli bir zamandan sonra),
terimler a'nın en fazla ε uzaklığında olmalılar.

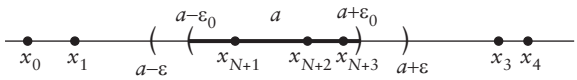
$|x_n - a| < \varepsilon$ eşitsizliğiyle $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ koşulunun aynı anlama geldiğini okura anımsatırım.

Kesirli bir sayıya yakınsayan dizilere ***yakınsak*** denir. Yakınsak olmayan dizilere de ***ıraksak*** denir.

Örneklere geçmeden önce bu önemli tanım üzerine biraz kafa yoralım. Bu tanımı özümsemek çok önemlidir. Okur, tanımın, sezgileriyle algıladığı "yakınsama"nın anlamını matematiksel olarak verdiğine ikna olmalıdır, dolayısıyla aşağıda yazılanları laf ebeliği olarak nitelemeyip dikkatle okumalıdır.

8.2. Tanımın Tartışması

Eğer belli bir $\varepsilon_0 > 0$ için (*) önermesini doğrulayan bir N sayısı bulmuşsak, bu ε_0'dan büyük ε'lar için de (*) önermesi aynı N ile doğrudur. Örneğin, $\varepsilon_0 = 0{,}001$ için $N = 10.000$ yetiyorsa, ε_0'dan daha büyük olan $\varepsilon = 0{,}003$ için de $N = 10.000$ yeter. Dolayısıyla marifet (*) önermesini küçük ε'lar için doğrula-



Eğer ε_0 için N yetiyorsa, ε_0'dan büyük bir ε için de N yeter.

maktır. Yani buradaki ε çok küçük (ama gene de pozitif) bir kesirli sayı olarak algılanmalıdır.

Tanımdaki N sayısı, ε'a göre değişir: ε küçüldükçe N'yi daha büyük almak zorunda kalabiliriz. ε ne kadar küçükse, x_n terimlerinin $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ aralığına düşmesi zorlaşır ve gecikebilir. Örneğin, $\varepsilon_0 = 0{,}001$ için $N = 10.000$ yetiyorsa, $\varepsilon_1 = 0{,}00001$ için artık $N = 10.000$ yetmeyebilir, N'yi daha büyük, örneğin 100.000 almak gerekebilir.

N'nin ε'a bağımlı olduğunu görsel olarak göstermek için, kimileyin N yerine N_ε yazılır.

Eğer bir ε için, (*) önermesini sağlayan bir N_ε doğal sayısı bulunmuşsa, bu N_ε sayısından büyük N'ler de (*) önermesini sağlarlar.

Bir dizinin yakınsak olması dizinin ilk terimlerinden bağımsız bir özelliktir, örneğin ilk 1 milyar terimin kaç olduğu dizinin yakınsaklığını zerre kadar ilgilendirmez. Dizinin yakınsaklığı, dizinin sadece kuyruğuyla ilgili bir özelliktir.

Dikkat: Bir dizinin a'ya yakınsaması için, amaç, verilmiş her $\varepsilon > 0$ için (*) önermesini sağlayan en küçük N doğal sayısını bulmak değildir. Böyle bir en küçük N doğal sayısı vardır elbette ama çoğunlukla bulması ya da ifade etmesi çok zordur. Amaç sadece (*) önermesini sağlayan bir N'nin olduğunu bulmaktır. Bu önemli. Bir dizinin bir sayıya yakınsadığını kanıtlamak işte bu yüzden zordur. ε verildiğinde, (*) önermesini doğrulayan tek bir N doğal sayısı olsaydı (rüyada mesela!), eminim kanıtlar çok daha kolay olurdu. Ama maalesef N'yi seçmekte bayağı bir özgürlüğümüz var. İşte bu özgürlüktür çoğu zaman matematiği zorlaştıran, yaratıcılık gerektiren ve heyecanlı kılan.

Bir şey daha: Tanımda $n > N$ yerine $n \geq N$ ve $|x_n - a| < \varepsilon$ yerine $|x_n - a| \leq \varepsilon$ veya $|x_n - a| < \varepsilon/2$ de yazabilirdik, kavram değişmezdi. Bu, belki küçük bir ayrıntıdır, ama okurun neden böyle olduğunu anlamasında çok yarar vardır. Gerekirse saatlerini versin bu ince noktaya, değer çünkü.

Birçok yakınsama örneği vereceğiz birazdan. Ama şimdi bir yakınsama kanıtının nasıl yapılacağını görelim.

Diyelim $(x_n)_n$ kesirli sayı dizisinin a kesirli sayısına yakınsadığını göstermek istiyorsunuz. Demek ki her $\varepsilon > 0$ kesirli sayısı için bir şey kanıtlamanız gerekiyor. O zaman hemen rastgele bir $\varepsilon > 0$ kesirli sayısı seçin. Yani kanıtınız,

$\varepsilon > 0$ *herhangi bir kesirli sayı olsun*

cümlesiyle başlamalıdır. Şimdi, her $n > N$ doğal sayısı için,

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir N doğal sayısı bulmaya çalışacaksınız. N'yi kafadan atarak hemen bulmaya çalışmayın, genellikle başaramazsınız.

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin doğru olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulmak için $|x_n - a|$ ifadesiyle oynamalısınız. Örneklerle her şey daha açık olacak.

8.3. Limitin Biricikliği

Eğer bir $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsıyorsa, o zaman

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

yazılır. İnce bir ayrıntı: Buradaki ∞ simgesinin tek başına anlamı yoktur. Burada anlamı olan ve bir anlam verilen,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

ifadesinin tümü birdendir ve bu, "n sonsuza giderken x_n'nin limiti vardır ve bu limit a'dır" ya da "n sonsuza giderken x_n dizisi a'ya gider" diye okunur.

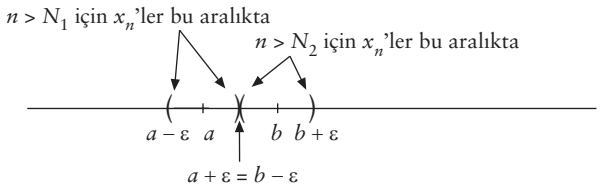
Bir de "$\lim_{n\to\infty} x_n$" ifadesine bir anlam verdik, bu "$(x_n)_n$ dizisinin limiti" anlamına gelir. Ancak $\lim_{n\to\infty} x_n$ ifadesini gönül rahatlığıyla kullanabilmemiz için bir dizinin en fazla **bir** sayıya yakınsadığını kanıtlamamız gerekmektedir. Eğer dizinin limiti hem a, hem b oluyorsa, ikisinden birini seçmemiz gerekir. Böyle bir seçime gerek olmadığını kanıtlayalım hemen:

Önsav 8.1. *Bir dizi en fazla bir sayıya yakınsayabilir.*

Kanıt: Hem a hem de b kesirli sayılarına yakınsayan bir $(x_n)_n$ dizisi ele alalım. $a = b$ eşitliğini kanıtlayacağız. Bunun için, eğer $a \neq b$ ise, $(x_n)_n$ dizisinin hem a'ya hem de b'ye aynı zamanda çok çok yakın olamayacağını kullanacağız elbette.

Aşağıdaki resimden izleyelim. $a \neq b$ eşitsizliğini varsayalım.

$$\varepsilon = |a - b|/2$$



Ve can alıcı soru: $n > \max\{N_1, N_2\}$ için x_n nerede?

olsun. $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsadığından, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N_1$ doğal sayısı için,

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliği doğrudur. Aynı nedenden, öyle bir N_2 vardır ki, her $n > N_2$ doğal sayısı için,

$$|x_n - b| < \varepsilon$$

eşitsizliği doğrudur. Şimdi n hem N_1'den hem de N_2'den büyük herhangi bir doğal sayısı olsun. Şu hesabı yapalım:

$$\begin{aligned} |a - b| &= |(a - x_n) + (x_n - b)| \\ &\leq |a - x_n| + |x_n - b| \\ &= |a - x_n| + |b - x_n| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a - b|, \end{aligned}$$

yani $|a - b| < |a - b|$. Bu da bariz bir çelişkidir, bir sayı kendinden küçük olamaz! □

Yukardaki önsavın izniyle, eğer bir $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsıyorsa, o zaman a'ya $(x_n)_n$ dizisinin ***limiti*** adı verilir ve yukarda dediğimiz gibi bu,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

olarak gösterilir.

8.4. Örnekler

Önsav 8.2. *Sabit a dizisi a'ya yakınsar. Daha genel olarak, zamanla sabitleşen bir dizi zamanla sabitleştiği sayıya yakınsar.*

Kanıt: $(x_n)_n$ dizisi zamanla sabitleşen bir dizi olsun. Yani belli bir göstergeçten sonra, diyelim M göstergecinden sonra hep a olsun: Eğer $n > M$ ise $x_n = a$. Bu dizinin a'ya yakınsadı-

ğını göstereceğiz. Rastgele bir $\varepsilon > 0$ kesirli sayısı seçelim. Şimdi, her $n > N$ doğal sayısı için,

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir N doğal sayısı bulmaya çalışacağız. Ama N'yi M almak yeterli. Nitekim, eğer $n > M$ olursa,

$$|x_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$$

olur. □

Arşimet Özelliği,

$$\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$$

eşitliğinin kanıtının özünü oluşturur. Nitekim, eğer $\varepsilon > 0$ rasgele bir kesirli sayıysa, N doğal sayısı $1 \leq N\varepsilon$ eşitsizliğini sağlayacak biçimde seçilsin. Şimdi, her $n > N$ göstergeci için,

$$1/n < 1/N \leq \varepsilon$$

olur.

Aynı kanıt nerdeyse $\lim_{n\to\infty} 1/n^2 = 0$ eşitliğini de kanıtlar: Bir $\varepsilon > 0$ için, aynen yukardaki N'yi seçelim:

$$1/n^2 \leq 1/n < 1/N \leq \varepsilon$$

olur. Benzer şekilde $\lim_{n\to\infty} 1/2n = 0$ eşitliği de kanıtlanır.

Örnek 8.3. Biraz daha zor bir limit alıştırması olarak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{n^2+n-5} = 0$$

eşitliğini gösterelim. Eşitliğin doğruluğunu kanıtlamadan önce, eşitliğin neden olması gerektiğini anlayalım. Pay, $n - 3$'e eşit. Ama n çok büyük olduğunda, sondaki -3'ün esamesi bile okunmaz. Bir trilyonerin servetinden 3 lira eksilse ne çıkar ki!.. Bu yüzden $n - 3$ yerine n yazabiliriz. Paydaya bakalım şimdi. Payda, $n^2 + n - 5$'e eşit. Ama n çok büyük olduğunda, n^2, n'den o kadar büyüktür ki, $n - 5$ onun yanında çok küçük kalır. Dolayısıyla, n çok büyük olduğunda $n^2 + n - 5$ yerine n^2 alabiliriz. Böylece paya n, paydaya n^2 yazarsak,

$$\frac{n-3}{n^2+n-5} \approx \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

elde ederiz. Bir excel tablosu yaparak bu iki sayının birbirine ne kadar yakın olduklarını görebilirsiniz.

Yukarda yaptığımız tam bir matematiksel kanıt değil. Şimdilik en azından. Ama daha sonra bu akıl yürütmeyi matematiksel bir kanıt haline dönüştüreceğiz.

Limitin 0 olduğunu şöyle de tahmin edebilirdik.

$$\frac{n-3}{n^2+n-5}$$

ifadesinin her terimini n^2'ye bölelim.

$$\frac{n-3}{n^2+n-5} = \frac{1/n - 3/n^2}{1+1/n-5/n^2}$$

elde ederiz. n çok büyük olduğunda, sağ taraftaki $3/n^2$, $1/n$ ve $5/n^2$ terimleri o kadar küçük sayılardır ki (bunu biraz önce kanıtlamıştık), bu sayılar yerine 0 yazarsak fazla hata yapmamış oluruz! Böylece,

$$\frac{n-3}{n^2+n-5} = \frac{1/n - 3/n^2}{1+1/n-5/n^2} \approx \frac{0-0}{1+0-0} = 0$$

elde ederiz.

Bu da şimdilik pek matematiksel değil. (İlerde olacak ama.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{n^2+n-5} = 0$$

eşitliğini tanıma başvurarak kanıtlayalım:

Her zamanki gibi pozitif bir $\varepsilon > 0$ sayısı seçerek başlıyoruz. Öyle bir N bulacağız ki, her $n > N$ için,

$$\left|\frac{n-3}{n^2+n-5} - 0\right| \le \varepsilon$$

olacak. Yani yukardaki eşitsizliğin doğru olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Soldaki ifadeyle oynayacağız. Soldaki ifadeyi büyüteceğiz ama bunu yaparken, n'yi büyülterek yeni ifadeyi dilediğimiz kadar küçültebileceğimize emin olacağız. Hesaplara başlıyoruz. Önce n'yi 3'ten bü-

yük alırsak hem pay hem de payda pozitif olur ve mutlak değer işaretinden kurtuluruz:

$$\left|\frac{n-3}{n^2+n-5}-0\right|=\frac{n-3}{n^2+n-5}$$

Eğer paydaki $n-3$ yerine n yazarsak daha büyük bir ifade buluruz elbet:

$$\frac{n-3}{n^2+n-5}<\frac{n}{n^2+n-5}$$

Şimdi sağdaki ifadenin ε'dan küçük olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Sağdaki ifadeyi büyütmeye devam ediyoruz, ama çok az büyüteceğiz.

Eğer n'yi 5'ten büyük alırsak, paydadaki $n-5$ pozitif olur ve o $n-5$'i silersek payda küçüleceğinden ifade büyür:

$$\frac{n}{n^2+n-5}<\frac{n}{n^2}.$$

En sağdaki ifade $1/n$'ye eşit. Demek ki n'yi, $1/n$ sayısı ε'dan küçük olacak biçimde seçmek yeterli. Bunun da Arşimet Özelliği sayesinde mümkün olduğunu biliyoruz (Teorem 6.11). Şimdi dört satırlık kanıtımızı yazabiliriz:

$\varepsilon > 0$, herhangi bir kesirli sayı olsun. $N > 5$ sayısı $1 < N\varepsilon$ eşitsizliğini sağlasın. Şimdi, her $n > N$ için,

$$\frac{n-3}{n^2+n-5}<\frac{n}{n^2+n-5}<\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon.$$

Kanıtımız tamamlanmıştır. □

Alıştırmalar

1. $x_n = (-1)^n$ formülüyle tanımlanan $(x_n)_n$ dizisinin limitinin olamayacağını kanıtlayın.

2. Eğer bir dizi yakınsaksa, bu diziyle aynı kuyruğa (bkz. Bölüm 7.4 Alıştırmalar) sahip dizilerin de yakınsak olduğunu ve limitlerinin hep aynı olduğunu kanıtlayın.

3. $\lim_{n\to\infty} (-1)^n/n = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

4. $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-3}{n^2+n-5}\right)^n = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

5*. $b_0 = 1$ ve

$$b_{n+1} = \frac{3b_n + 4}{2b_n + 3}$$

formülüyle tanımlanmış $(b_n)_n$ dizisinin karesinin 2'ye yakınsadığını kanıtlayın. (Bkz. "√2'ye Yakınsamak İsteyen Bir Dizi" yazısı.)

6. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-2n-3}{3n^2+2n-52} = \dfrac{4}{3}$ eşitliğini tanıma başvurarak kanıtlayın.