

3A*. Tümevarım Teoremi

Toplamayla çarpma fonksiyonlarının varlığının kanıtlandığı Teorem 3.1 ve 3.8'i genelleştireceğiz. Teorem, eğer

$$\psi : X \rightarrow X \text{ ve } \varphi : X \times X \rightarrow X$$

iki fonksiyonsa, her $x \in X$ için,

$$f(x, 0) = \psi(x)$$

$$f(x, 1) = \varphi(x, \psi(x))$$

$$f(x, 2) = \varphi(x, \varphi(x, \psi(x)))$$

$$f(x, 3) = \varphi(x, \varphi(x, \varphi(x, \psi(x))))$$

gibi eşitlikleri sağlayan bir $f : X \times \mathbb{N} \rightarrow X$ fonksiyonu olduğunu söyleyecek ve bu teorem sayesinde fonksiyonlarımızı tümevarımla tanımlayabileceğiz.

Tümevarım Teoremi 3A.1. *X bir küme olsun.*

$$\psi : X \rightarrow Y \text{ ve } \varphi : X \times Y \rightarrow Y$$

iki fonksiyon olsun. O zaman her $x \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$f(x, 0) = \psi(x),$$

$$f(x, Sn) = \varphi(x, f(x, n))$$

eşitliklerini sağlayan bir ve bir tek

$$f : X \times \mathbb{N} \rightarrow Y$$

fonksiyonu vardır.

Kanıtı başlamadan önce teoremin toplamayı ve çarpmayı nasıl tanımladığını görelim.

Toplama. Teoremde $X = Y = \mathbb{N}$, $\psi = \text{Id}_X$ (özdeşlik fonksiyonu) ve $\varphi = S \circ \text{pr}_2$, yani $\varphi(x, n) = Sn$ olarak alalım. O zaman elde edilen fonksiyon,

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= x, \\ f(x, Sn) &= S(f(x, n)) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlar; bunlar da aynen toplamının sağlaması gerektiği eşitliklerdir.

Çarpma. Teoremde $X = Y = \mathbb{N}$, $\psi = s_0$ (sabit 0 fonksiyonu) ve φ 'yi yukarda varlığı (bir kez daha) kanıtlanan toplama fonksiyonu olarak alalım, yani $\varphi(x, n) = n + x$ olarak alalım. (Özellikle $x + n$ yerine $n + x$ yazdık.) O zaman elde edilen fonksiyon,

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= 0, \\ f(x, Sn) &= f(x, n) + n \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlar; bunlar da aynen çarpmanın sağlaması gerektiği eşitliklerdir.

Alıştırmalar

3A.1. Tümevarım Teoremi'ni kullanarak, ortaokuldan beri bildiğimiz $f(x, y) = x^y$ fonksiyonunu tanımlayın. (Not: $x^0 = 1$ olsun, bu varsayıma $0^0 = 1$ eşitliği de dahildir.)

3A.2. S bir küme, $a \in S$, ve $\psi : S \rightarrow S$ bir fonksiyon olsun.

$$f(0) = a$$

ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f(Sn) = \psi(f(n))$$

eşitliklerini sağlayan bir $f : \mathbb{N} \rightarrow S$ fonksiyonunun varlığını kanıtlayın.

3A.3. X bir küme ve $\alpha : X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. Yukardaki alıştırmadan yararlanarak,

$$f(n) = \alpha^n = \alpha \circ \cdots \circ \alpha \text{ (} n \text{ defa)}$$

eşitliğini sağlayan bir

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \text{Fonk}(X, X)$$

fonksiyonun varlığını kanıtlayın. ($\alpha^0 = \text{Id}_X$ olarak tanımlanmıştır.) Bundan

$$\{\alpha^n : n \in \mathbb{N}\}$$

ve her $x \in X$ için,

$$\{\alpha^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$$

topluluklarının bir küme olduklarını çıkarın.

3A.4. $f(n) = n!$ formülünün $\mathbb{N}$ 'den $\mathbb{N}$ 'ye giden bir fonksiyon tanımladığını kanıtlayın.

Tümevarım Teoremi'nin Kanıtı: Her $x \in X$, $y \in Y$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için, $(X \times \mathbb{N}) \times Y$ kartezyen çarpımının,

$$(x, 0, \psi(x)) \in G$$

ve

$$(x, n, y) \in G \rightarrow (x, Sn, \varphi(x, y)) \in G$$

koşullarını sağlayan bir G altkümesine bu kanıtlık **güzel küme** diyelim. En az bir güzel küme vardır: $(X \times \mathbb{N}) \times Y$. Güzel kümelerin kesişiminin gene güzel bir küme olduğunu kanıtlamak zor değildir. Bu kesişime G diyelim. G en küçük güzel kümedir, yani tüm güzel kümelerin altkümesidir. Şimdi G 'nin bir grafik olduğunu, dolayısıyla $X \times \mathbb{N}$ 'den Y 'ye giden bir fonksiyon tanımladığını kanıtlayacağız. G 'nin tanımladığı bu fonksiyona f dersek, f elbette teoremden istenen eşitsizlikleri sağlar. Ayrıca, f 'nin biricikliği de bariz olur: g teoremden söylendiği gibi bir fonksiyonsa, g 'nin grafiği, diyelim G' , güzel bir küme olur, dolayısıyla G 'yi içerir ama iki grafik ancak eşitlerse biri diğerini içerebilir.

Her $(x, n) \in X \times \mathbb{N}$ için

$$(x, n, y) \in G$$

koşulunu sağlayan bir $y \in Y$ olduğunun kanıtı n üzerine tümevarımla kolay. Verilmiş $(x_0, n_0) \in X \times \mathbb{N}$ için, yukardaki koşulu sağlayan $y_0 \in Y$ elemanının biricikliğini kanıtlayalım. Bunu da n_0 üzerine tümevarımla kanıtlayacağız.

Başlangıç Adımı. $n_0 = 0$ varsayımını yapalım.

$$(x_0, 0, \psi(x_0)) \in G$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca bir $y_0 \neq \psi(x_0)$ için,

$$(x_0, 0, y_0) \in G$$

eşitliğini varsayalım. $G' = G \setminus \{(x_0, 0, y_0)\}$ olsun. G' kümesinin de güzel bir küme olduğunu kanıtlayarak bir çelişki elde edeceğiz. Önce birinci koşulla başa çıkalım. $x \in X$ olsun.

$$(x, 0, \psi(x)) \in G$$

içindeliğini biliyoruz. Ama $(x, 0, \psi(x))$ üçlüsü $(x_0, 0, y_0)$ üçlüsüne eşit olamaz yoksa $x = x_0$ ve $\psi(x) = y_0$ olur, dolayısıyla varsayımımızla çelişen $\psi(x_0) = \psi(x) = y_0$ eşitliğini elde ederiz. Demek ki $(x, 0, \psi(x)) \in G'$. İkinci koşula gelince... $(x, n, y) \in G'$ olsun. Demek ki $(x, n, y) \in G$. Dolayısıyla $(x, Sn, \varphi(x, y)) \in G$. Ama $(x, Sn, \varphi(x, y))$ üçlüsü $(x_0, 0, y_0)$ üçlüsüne eşit olamaz yoksa $Sn = 0$ olurdu ve bu da P1 ile çelişirdi. Demek ki istediğimiz gibi $(x, Sn, \varphi(x, y)) \in G'$.

Tümevarım Adımı. $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı, “her $x \in X$ için

$$(x, n_0, y) \in G$$

özelliğini sağlayan bir ve bir tane $y \in Y$ vardır” özelliğini sağlasın. Aynı özelliği Sn_0 için gösterelim. $x_0 \in X$ rastgele bir eleman olsun. Bir ve bir tek $y_0 \in Y$ için

$$(x_0, n_0, y_0) \in G.$$

Demek ki,

$$(x_0, Sn_0, \varphi(x_0, y_0)) \in G.$$

Diyelim bir $\varphi(x_0, y_0) \neq y_1 \in Y$ için

$$(x_0, Sn_0, y_1) \in G.$$

Şimdi G' kümesini şöyle tanımlayalım:

$$G' = G \setminus \{(x_0, Sn_0, y_1)\}.$$

G' kümesinin güzel olduğunu kanıtlayarak G 'nin en küçük güzel küme olmasıyla çelişeceğiz. Önce birinci koşulun sağlandığını gösterelim. Her $x \in X$,

$$(x, 0, \psi(x)) \in G$$

olduğundan, ve P1'den dolayı $(x, 0, \psi(x))$ üçlüsü G 'den çıkarılan (x_0, Sn_0, y_1) elemanına eşit olamayacağından,

$$(x, 0, \psi(x)) \in G'$$

olur. Gelelim ikinci koşula. $x \in X, y \in Y$ ve $n \in \mathbb{N}$ için,

$$(x, n, y) \in G'$$

koşulunun sağlandığını varsayalım. $G' \subseteq G$ olduğundan

$$(x, n, y) \in G$$

ve dolayısıyla

$$(x, Sn, \varphi(x, y)) \in G.$$

Eğer

$$(x, Sn, \varphi(x, y)) = (x_0, Sn_0, y_1)$$

olsaydı,

$$x = x_0,$$

$$Sn = Sn_0,$$

$$\varphi(x, y) = y_1$$

olurdu. Demek ki

$$n = n_0.$$

Bunlardan,

$$(x_0, n_0, y) = (x, n, y) \in G$$

çıkar. Ama aynı zamanda

$$(x_0, n_0, y_0) \in G.$$

Demek ki, tümevarım varsayımına göre,

$$y = y_0.$$

Buradan

$$\varphi(x_0, y_0) = \varphi(x, y) = y_1$$

buluruz. Çelişki. Demek ki

$$(x, Sn, \varphi(x, y)) \neq (x_0, Sn_0, y_1)$$

Yani

$$(x, Sn, \varphi(x, y)) \notin T \setminus \{(n_0, Sm_0, p_1)\} = T'.$$

Böylece T' kümesinin güzel olduğunu kanıtladık. Bu da elde etmek istediğimiz nihai çelişkidir. $\square$

Bu teoremin çok önemli bir sonucu vardır: Eğer $f : X \rightarrow X$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $f^n(x_0)$ değerini alan bir $h : \mathbb{N} \rightarrow X$ fonksiyonu vardır:

Sonuç 3A.2. X bir küme, $f : X \rightarrow X$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ bir eleman olsun. O zaman,

$$\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots\}$$

topluluğu bir kümedir. Daha doğru bir ifadeyle, öyle bir ve bir tane

$$h : \mathbb{N} \rightarrow X$$

fonksiyonu vardır ki,

$$h(0) = x_0,$$

ve her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$h(Sn) = f(h(n))$$

olur. Bir başka ifadeyle, X 'in x_0 'ı içeren ve f altında kapalı en küçük altkümesi vardır.

Kanıt: Bu sonucun standart kanıtı, X 'in x_0 'ı içeren ve f altında kapalı tüm altkümelerinin kesişimini almaktır (X , bu tür altkümelerden biridir), yani aslında Teorem 3A.1'in kanıtını bu duruma uyarlamaktır. Biz doğrudan Teorem 3A.1'den yararlanacağız.

$\psi : X \rightarrow X$ fonksiyonu,

$$\psi(x) = x_0$$

olarak tanımlansın, yani sabit x_0 fonksiyonu olsun.

$\varphi : X \times X \rightarrow X$ fonksiyonu da

$$\varphi(x, y) = f(y)$$

olarak tanımlansın. Teorem 3.22'ye göre, öyle bir

$$g : X \times \mathbb{N} \rightarrow X$$

fonksiyonu vardır ki,

$$g(x, 0) = \psi(x) = x_0,$$

$$g(x, Sn) = \varphi(x, g(x, n)) = f(g(x, n))$$

olur. Kanıt için gerekmez ama, n üzerine tümevarımla, $g(x, n)$ değerinin x 'ten bağımsız olduğu kanıtlanabilir.

$$u : \mathbb{N} \rightarrow X \times \mathbb{N}$$

fonksiyonu

$$u(n) = (x_0, n)$$

kuralıyla tanımlansın.

$$h = g \circ u : \mathbb{N} \rightarrow X$$

olsun. O zaman,

$$h(0) = (g \circ u)(0) = g(u(0)) = g(x_0, 0) = x_0,$$

ve

$$\begin{aligned} h(Sn) &= (g \circ u)(Sn) = g(u(Sn)) = g(x_0, Sn) \\ &= f(g(x_0, n)) = f(g(u(n))) = f((g \circ u)(n)) \\ &= f(h(n)) \end{aligned}$$

olur. $h(\mathbb{N})$ varlığı kanıtlanmak istenen kümedir. $\square$

3B*. Doğal Sayıların Biricikliği

Önceki bölümlerde, doğal sayı yapısını, P1 ve P2 özelliklerini sağlayan bir $(\mathbb{N}, 0, S)$ üçlüsü olarak tanımladık ve varlığını gösterdik. Ardından toplama ve çarpmayı tanımlayıp bu iki işlemin önemli özelliklerini ortaya gösterdik. Bu bölümde P1 ve P2 özelliklerini sağlayan (tanımlanacak bir anlamda) en fazla bir $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapısı olduğunu kanıtlayacağız.

Tanım: $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{N}'$ birer küme, $0 \in \mathbb{N}$, $0' \in \mathbb{N}'$ ve $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ve $S' : \mathbb{N}' \rightarrow \mathbb{N}'$ birer fonksiyon olsun. Eğer

$$f(0) = 0'$$

ve her $x \in \mathbb{N}$ için

$$f(Sx) = S'(f(x))$$

eşitliklerini sağlayan bir $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}'$ eşlemesi varsa, $(\mathbb{N}, 0, S)$ ve $(\mathbb{N}', 0', S')$ üçlülerine *eşyapısal* ya da *izomorf* denir. f eşlemesine de *eşyapı eşlemesi* ya da *izomorfizma* adı verilir.

Teorem 3B.1 [Dedekind]. $(\mathbb{N}, 0, S)$ ve $(\mathbb{N}', 0', S')$ üçlülere P1 ve P2 özelliklerini sağlasınlar. (İkincisi muadil özellikleri sağlayacak elbette: P1 ve P2'de $\mathbb{N}$, 0 ve S simgelerine ' işaretini ekleyin.) O zaman $(\mathbb{N}, 0, S)$ ve $(\mathbb{N}', 0', S')$ üçlülere eşyapısaldırlar ve birinden diğerine giden tek bir eşyapı eşlemesi vardır.

Kanıt: Teorem 3.22'de $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{N}'$, $\psi = s_{0'}$ (sabit $0'$ fonksiyonu) ve $\varphi(x, y) = S'y$ alalım. φ 'nin değerinin birinci koordinattan bağımsız olduğuna dikkatinizi çekerim. f bu teoremden bulunan fonksiyon olsun:

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}'$$

ve

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= \psi(x) = 0', \\ f(x, Sn) &= \varphi(x, f(x, n)) = S'(f(x, n)) \end{aligned}$$

olur. f 'nin değerinin birinci koordinattan bağımsız olduğu n üzerine tümevarımla gösterilebilir. Dolayısıyla f 'yi ikinci koordinatın fonksiyonu olarak görebiliriz. Böylece bulunan

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}'$$

funksiyonu her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} f(0) &= 0', \\ f(Sn) &= S'(f(n)) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlar. Böylece istenen eşitlik kanıtlanmış oldu.

$0'$ 'dan başka $0'$ değerini alan $\mathbb{N}'$ 'nin bir başka elemanı olmadığı belli: $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ise, bir $m \in \mathbb{N}$ için $n = Sm$ olur ve o zaman da

$$f(n) = f(Sm) = S'(f(m)) \neq 0'$$

olur.

Eğer $m \in \mathbb{N}'$ (tümevarım varsayımından dolayı) tek bir $n \in \mathbb{N}$ tarafından vuruluyorsa, o zaman $S'm$ 'nin de Sn tarafından vurulduğunu kanıtlamak zor değil:

$$f(Sn) = S'(f(n)) = S'm.$$

Demek ki f örten bir fonksiyon. Eğer ayrıca

$$f(p) = S'm$$

ise, bir önceki paragrafa göre, $p, 0$ olamaz ve bir $q \in \mathbb{N}$ için $p = Sq$ olur. Dolayısıyla

$$S'(m) = f(p) = f(Sq) = S'(f(q))$$

olur ve P1'den dolayı $m = f(q)$, yani $f(n) = f(q)$ bulunur. Tümevarım varsayımından $n = q$ çıkar. Demek ki f birebir bir fonksiyon.

Şimdi f' 'den başka bir eşyapı eşlemesi olmadığını kanıtlayalım. Diyelim g de böyle bir eşyapı eşlemesi. O zaman $g^{-1} \circ f$ bileşkesi $\mathbb{N}'$ 'den $\mathbb{N}$ 'ye giden bir eşyapı eşleşmesi olur. Demek ki $\mathbb{N}'$ 'den $\mathbb{N}$ 'ye giden bir eşyapı eşleşmesinin $\text{Id}_{\mathbb{N}}$ olduğunu kanıtlamalıyız. $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bir eşyapı eşleşmesi olsun. $h(n) = n$ eşitliğini n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız.

$h(0)$ 'ın 0 olması gerektiğini yukarda gördük. ($\mathbb{N}'$ yerine $\mathbb{N}$ alın.) Ayrıca $h(n) = n$ ise $h(Sn) = S(h(n)) = S(n)$ olur. n üzerine tümevarım istediğimiz kolayca verir. $\square$