Sezgisel Kümeler Kuramı (Math 111)
Birinci Vize
Sorular ve Cevaplar

Sonbahar 2002
Ali Nesin

10 Ekim 2010

1. a) *Verilen bir X kümesi için $\cup X$ şöyle tanımlansın:*

$$y \in \cup X \text{ ancak ve ancak öyle bir } x \in X \text{ var ki } y \in x.$$

$\cup\emptyset = \emptyset$ *olduğunu gösterin.* (3 puan)

Kanıt: Tanımda $X = \emptyset$ alalım. Bu durumda

$$y \in \cup\emptyset \text{ ancak ve ancak öyle bir } x \in \emptyset \text{ var ki } y \in x.$$

$x \in \emptyset$ özelliğini sağlayan bir x olmadığından $\cup\emptyset = \emptyset$ olduğunu görürüz.

b) *Verilen bir X kümesi için $\cap_1 X$ ve $\cap_2 X$ şöyle tanımlansın:*

$$\begin{array}{lll} y \in \cap_1 X & \text{ancak ve ancak} & y \in x \text{ her } x \in X \text{ için} \\ y \in \cap_2 X & \text{ancak ve ancak} & y \in \cup X \text{ ve } y \in x \text{ her } x \in X \text{ için} \end{array}$$

$\cap_1 X = \cap_2 X$ *eşitliği her X için sağlanır mı? $\cap X$ için hangi tanımı tercih edersiniz ve niye?* (5 puan)

Cevap: Elbette $\cap_2 X \subseteq \cap_1 X$ çünkü tanımdan $\cap_2 X = (\cap_1 X) \cap (\cup X)$.

Diğer yöndeki kapsama sadece $X \neq \emptyset$ sağlanıyorsa doğru. Diyelim ki $X \neq \emptyset$. $y \in \cap_1 X$ olsun. $y \in \cap_2 X$ olduğunu göstermek için $y \in \cup X$ olduğunu göstermemiz gerek, yani bir $x \in X$ için $y \in x$ olmalı. $X \neq \emptyset$ olduğundan ve $y \in \cap_1 X$ olduğundan bu doğru. Demek ki bir $x \in X$ için $y \in x$.

Diğer yöndeki kapsama eğer $X = \emptyset$ ise doğru değil. Elimizde şu var:

$$\cap_2\emptyset = (\cap_1\emptyset) \cap (\cup\emptyset) = (\cap_1\emptyset) \cap \emptyset = \emptyset.$$

Diğer yandan

$$y \in \cap_1\emptyset \text{ ancak ve ancak } y \in x \text{ her } x \in \emptyset \text{ için}$$

ve bu her y için doğru. Dolayısıyla $\cap_1\emptyset$ tüm evren olmal ve bir küme bile değil.

Bu yüzden $\cap X$ tanımı için $\cap_2 X$'i tercih etmeliyiz çünkü bu durumda sonuç $X = \emptyset$ olsa bile bir küme oluyor!

2. *Öyle bir X kümesi bulun ki $X \cap \wp(X) \neq \emptyset$ sağlansın.* (3 puan.)

   Cevap. $\emptyset \in \wp(X)$ olduğundan her X için boşkümeyi eleman olarak içeren her X işimizi görür, mesela $X = \{\emptyset\}$ alabiliriz.

3. *$(A_i)_{i\in I}$ bir küme ailesi olsun.*

   a) $\bigcap_{i\in I} \wp(A_i) = \wp(\bigcap_{i\in I} A_i)$ *olduğunu gösterin.* (3 puan)

   Kanıt:

$$\begin{array}{lll} X \in \bigcap_{i\in I} \wp(A_i) & \text{ancak ve ancak} & X \in \wp(A_i) \text{ her } i \in I \text{ için} \\ & \text{ancak ve ancak} & X \subseteq A_i \text{ her } i \in I \text{ için} \\ & \text{ancak ve ancak} & X \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i \\ & \text{ancak ve ancak} & X \in \wp(\bigcap_{i\in I} A_i) \end{array}$$

   b) $\bigcup_{i\in I} \wp(A_i)$ *ve* $\wp(\bigcup_{i\in I} A_i)$*arasındaki ilişki nedir?* (4 puan)

   Cevap: $\bigcup_{i\in I} \wp(A_i) \subseteq \wp(\bigcup_{i\in I} A_i)$ ilişkisi doğru. Kanıt şöyle:

$$\begin{array}{lll} X \in \bigcup_{i\in I} \wp(A_i) & \text{ancak ve ancak} & X \in \wp(A_i) \text{ bir } i \in I \text{ için} \\ & \text{ancak ve ancak} & X \subseteq A_i \text{ bir } i \in I \text{ için} \\ & \text{gerektirir} & X \subseteq \cup_{i\in I} A_i \\ & \text{ancak ve ancak} & X \in \wp(\cup_{i\in I} A_i) \end{array}$$

   Diğer kapsama yanlış, aslında eğer A_i'lerden biri tüm diğer kümeleri içermezse $\cup_{i\in I} A_i \in \wp(\cup_{i\in I} A_i) \setminus \bigcup_{i\in I} \wp(A_i)$.

4. *$(X \times Y) \cap (Y \times X)$ kümesi nedir?* (3 puan)

   Cevap: $(u, v) \in (X \times Y) \cap (Y \times X)$ olsun. $(u, v) \in X \times Y$ olduğundan u, X'in bir elemanı ve v de Y'nin bir elemanı. Benzer şekilde, $(u, v) \in Y \times X$ olduğu için, u, Y'nin bir elemanı ve v de X'in bir elemanı. Yani hem u hem de v $X \cap Y$'nin elemanı. Demek ki $(u, v) \in (X \cap Y) \times (X \cap Y)$.

   Diğer yöndeki kapsama, $(X \cap Y) \times (X \cap Y) \subseteq (X \times Y) \cap (Y \times X)$, bariz.

5. *α her $x \in \alpha$ için $x \subseteq \alpha$ koşulunu sağlayan bir küme olsun. $\alpha \cup \{\alpha\}$ kümesinin de aynı özelliği sağladığını gösterin. Bu özelliği sağlayan 4 küme örneği verin.* (4 puan)

   Kanıt: $x \in \alpha \cup \{\alpha\}$ olsun. O zaman ya $x \in \alpha$ olur ya da $x \in \{\alpha\}$.

   Eğer $x \in \alpha$ ise, o zaman, varsayımdan, $x \subseteq \alpha$ sağlanır. $\alpha \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$ olduğu için, bu durumda $x \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$ elde ederiz.

   Eğer $x \in \{\alpha\}$ ise, $x = \alpha$ sağlanır, ve $x = \alpha \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$ olur.

$\emptyset$ aynı özelliğe sahip olduğundan, boşkümeden başlayıp, istediğimiz kadar örnek üretebilirz. İşte böyle elde edilen ilk dört örnek:

$$\begin{aligned}
&\emptyset = 0\\
&0 \cup \{0\} = 1\\
&1 \cup \{1\} = 2\\
&2 \cup \{2\} = 3
\end{aligned}$$

6. *Γ, şu özelliği sağlayan bir çizge olsun: herhangi dört α, α_1, β, β_1 noktası verildiğinde eğer $\alpha \neq \alpha_1$ ve $\beta \neq \beta_1$ sağlanıyorsa $\phi(\alpha) = \beta$ ve $\phi(\alpha_1) = \beta_1$ eşitliklerini sağlayan bir $\phi \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ vardır. Γ hakkında ne söyleyebilirsiniz?* (5 puan)

   Cevap: Bu durumda ya çizge tamdı (olası tüm kenarlar mevcuttur) ya da çizgede hiç kenar yoktur. Eğer bu doğru değilse, öyle α, α_1 ve $\beta \neq \beta_1$ bulabilirz ki α ve α_1 bağlıdır (ve dolayısıyla $\alpha \neq \alpha_1$) ve β ve β_1 bağlı değildir. Ama pair (α, α_1) gibi bağlı olmayan bir çifti (β, β_1) gibi bağlı bir çifte göndermek imkansız.

7. *$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, her x, $y \in \mathbb{R}$ için $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$ ve $\phi(x^2) = \phi(x)^2$ koşullarını sağlayan* **birebir** *bir fonksiyon olsun. Her x, $y \in \mathbb{R}$ için $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ ve her $q \in \mathbb{Q}$ için for all $\phi(q) = q$ eşitliklerinin sağlandığını kanıtlayın.* (10 puan)

   Kanıt: Her $x, y \in \mathbb{R}$ için şu doğru $\phi(x)^2 + 2\phi(x)\phi(y) + \phi(y)^2 = (\phi(x) + \phi(y))^2 = \phi(x + y)^2 = \phi((x + y)^2) = \phi(x^2 + 2xy + y^2) = \phi(x^2) + 2\phi(xy) + \phi(y^2) = \phi(x)^2 + 2\phi(xy) + \phi(y)^2$ and so $2\phi(x)\phi(y) = 2\phi(xy)$. Sadeleştirerek $\phi(x)\phi(y) = \phi(xy)$ eşitliğini elde ederiz. Bu ilk kısmı kanıtlar.

   $\phi(0) = \phi(0 + 0) = \phi(0) + \phi(0)$ olduğundan $\phi(0) = 0$ doğru olmalı.

   $\phi(1) = \phi(1 \cdot 1) = \phi(1)\phi(1)$ olduğundan da $\phi(1) = 0$ veya $\phi(1) = 1$ doğru olmalı. İlk eşitlik mümkün değil, çünkü ϕ birebir ve zaten $\phi(0) = 0$ already. Demek ki $\phi(1) = 1$.

   Tümevarımla kolayca görüyoruz ki her $n \in \mathbb{N}$ için $\phi(n) = n$ çünkü $\phi(n + 1) = \phi(n) + \phi(1) = \phi(n) + 1 = n + 1$ (son eşitlik tümevarım varsayımı).

   Ayrıca, $n \in \mathbb{N}$ için elimizde şu var $0 = \phi(0) = \phi(n + (-n)) = \phi(n) + \phi(-n)$ ve dolayısıyla $\phi(-n) = -\phi(n) = -n$. Yani her $n \in \mathbb{Z}$ için $\phi(n) = n$.

   Eğer $q \in \mathbb{Q}$ ise öyle n, $m \in \mathbb{Z}$ var ki $m \neq 0$ ve $q = n/m$. Bu durumda şu doğru $n = \phi(n) = \phi(mn/m) = \phi(m)\phi(n/m) = m\phi(n/m)$ ve $\phi(n/m) = n/m$, yani $\phi(q) = q$.

8. *Verilen X kümesi için $\wp^n(X)$, n üzerine tümevarımla şu şekilde tanımlanır: $\wp^0(X) = X$ and $\wp^{n+1}(X) = \wp(\wp^n(X))$.*

   a) *Her X kümesi için $\{\{\emptyset\}, \{\{X\}\}\} \in \wp^n(X)$ koşulunu sağlayan bir n doğal sayısı var mıdır?* (8 puan)

Cevap: Eğer $n \geq 4$ iseaşağıdaki önermeler birbirine denk:

$$\begin{array}{l}
\{\{\emptyset\}, \{\{X\}\}\} \in \wp^n(X) \\
\{\{\emptyset\}, \{\{X\}\}\} \subseteq \wp^{n-1}(X) \\
\{\emptyset\},\ \{\{X\}\} \in \wp^{n-1}(X) \\
\{\emptyset\},\ \{\{X\}\} \subseteq \wp^{n-2}(X) \\
\emptyset,\ \{X\} \in \wp^{n-2}(X) \\
\emptyset \in \wp^{n-2}(X) \text{ and } \{X\} \subseteq \wp^{n-3}(X) \\
\{X\} \subseteq \wp^{n-3}(X) \\
\{X\} \subseteq \wp^{n-3}(X) \\
X \in \wp^{n-3}(X) \\
X \subseteq \wp^{n-4}(X)
\end{array}$$

Eğer $n = 4$ ise son koşul tüm X kümeleri için geçerli.

Peki $n = 5$ için de geçerli mi? Yani $X \subseteq \wp(X)$ her X için doğru mu? Bu koşulun sağlanması için X'in tüm elemanlarının X'in altkümesi olması gerek. Eğer $i \geq 1$ ise öyle bir X bulabiliriz ki $X \not\subseteq \wp^i(X)$ sağlanır. Demek ki $n \geq 5$ (detaylar alıştırmarakılmıştır).

$n = 0, 1, 2, 3$ durumlarında $\{\{\emptyset\}, \{\{X\}\}\} \notin \wp^n(X)$ koşulunu sağlayan X kümeleri bulun.

b) *Her X kümesi ve her n doğal sayısı için $\wp(\wp^n(X)) = \wp^n(\wp(X))$ eşitliğini kanıtlayın.* (8 puan)

Kanıt: n üzerine tümevarım yapacağız. Eşitlik elbette $n = 0$ için doğru. n için doğru olduğunu varsayalım. Elimizde $\wp(\wp^{n+1}(X)) = \wp(\wp^n(\wp(X))) = \wp^{n+1}(\wp(X))$ eşitlikleri var.

c) Her X kümesi ve her n ve m doğal sayıları için $\wp^n(\wp^m(X)) = \wp^m(\wp^n(X))$ eşitliğinin sağlandığını gösterin. (8 puan)

Kanıt: m üzerine tümevarım yapacağız. Eşitlik elbette $m = 0$ için doğru. (b) kısmından ayrıca $m = 1$ durumu da çıkıyor. m için eşitliğin doğru olduğunu varsayalımx. Buradan $\wp^n(\wp^{m+1}(X)) = \wp^n(\wp(\wp^m(X))) = \wp(\wp^n(\wp(X)) = \wp^{n+1}(\wp^m(X))$ elde ederiz.

9. $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ *üzerinde $\prec$ sıralmasını $x \prec y$ ancak ve ancak $x^2|y$ kuralıyla tanımlayalım. Bu sıralamanın tüm otomorfizmalarını tarif edin.* (5 puan)

   Cevap: Bu sıralı kümenin (bu kümeye bundan sonra Γ diyelim) minimal elemanları kare böleni olmayan sayılardır. Bu yüzden Γ'nin tüm otomorfizmaları kare böleni olmayan sayıları kare böleni olmayan sayılara götürür. Ama asal sayıların özel bir durumu var. Eğer p asalsa p'den hemen sonra gelen öyle bir eleman vardır ki (bu eleman p^2) bu elemandan önce gelen sadece bir eleman vardır (bu eleman da p). Bundan tüm otomorfizmaların çarpmayı koruduğu çıkar. Dolayısıyla her otomorfizma asalların bir permutasyonu tarafından verilir.

10. *X bir küme olsun. Γ de X'in iki elemanlı altkümelerinden oluşan küme olsun. Γ üzerinde şu ilişkişyi tanımlayalım: $\alpha R \beta$ ancak ve ancak $\alpha \cap \beta = \emptyset$. Γ bu ilişkiyle bir çizge olur.*

a) $|X| = 4$*'ken* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *grubunun eleman sayısını hesaplayın.* (3 puan)

Cevap: Γ çizgesinde sadece ikişer ikişer birleştirilmiş altı köşe var. $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$'e izomorf bir grup kenarları koruyor ve $\mathrm{Sym}(3)$'de kenarların yerleririni değiştiriyor. Demek ki grupta $8 \times 3! = 48$ eleman var.

Daha biçimsel olmak gerekirse şöyle bir kanıt verilebilir. Köşeler $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ve kenarlar $v_1 = (1, 4)$, $v_2 = (2, 5)$ ve $v_3 = (3, 6)$ olsun. $\mathrm{Sym}(3)$'ü $\mathrm{Aut}(\Gamma) \leq \mathrm{Sym}(6)$ içine şu fonksiyonla gömebilirsiz:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathrm{Id}_3 & \mapsto & \mathrm{Id}_6 \\
(12) & \mapsto & (12)(45) \\
(13) & \mapsto & (13)(46) \\
(23) & \mapsto & (23)(56) \\
(123) & \mapsto & (123)(456) \\
(132) & \mapsto & (132)(465)
\end{array}
$$

Herhangi bir $\phi \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ için $\mathrm{Sym}(3)$'ün imgesinde öyle bir a elemanı var ki $\alpha^{-1}\phi$ şu üç kenarı koruyor $v_1 = (1, 4)$, $v_2 = (2, 5)$ ve $v_3 = (3, 6)$. Yani $\alpha^{-1}\phi \in \mathrm{Sym}\{1, 4\} \times \mathrm{Sym}\{2, 5\} \times \mathrm{Sym}\{3, 6\} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$. Buradan da $\mathrm{Aut}(\Gamma) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathrm{Sym}(3)$ elde ediyoruz (gelecek yıl açıklanmak üzere).

b) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *durumunda* Γ *çizgesini çizin.* (3 puan)

On nokta var. Biri diğerinin içinde iki beşgen çizin. Dıştakini $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 1\}$, $\{2, 3\}$, $\{4, 5\}$ diye etiketleyin. Çizgeyi tamalayın.

c) $\mathrm{Sym}(5)$*'in* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *içinde doğal bir kopyası olduğunu gösterin. (Göstermeniz gereken* $\mathrm{Sym}(5)$*'teki her* σ*'nin* Γ*'deki bir* $\tilde{\sigma}$ *elemanına denk geldiği, öyle ki* $\sigma \mapsto \tilde{\sigma}$ *birebir bir fonksiyon ve* $\widetilde{\sigma_1 \circ \sigma_2} = \widetilde{\sigma_1} \circ \widetilde{\sigma_2}$*).* (8 puan)

d) $\mathrm{Aut}(\Gamma) \simeq \mathrm{Sym}(5)$ *olduğunu gösterin.* (12 puan)

(c) ve (d)'nin kanıtı: Elbette her $\sigma \in \mathrm{Sym}(5)$ için Γ'nin bir $\tilde{\sigma}$ otomorfizmasını bulabiliriz: $\tilde{\sigma}\{a, b\} = \{\sigma(a), \sigma(b)\}$. Bu fonksiyonun köşelerin bağlı olma ilişkisini koruduğu bariz. Bu fonksiyon birebir çünkü eğer $\tilde{\sigma} = \tilde{\tau}$ ise tüm birbirinden farklı a, b, c, elemanları için $\{\sigma(b)\} = \{\sigma(a), \sigma(b)\} \cap \{\sigma(b), \sigma(c)\} = \tilde{\sigma}\{a, b\} \cap \tilde{\sigma}\{b, c\} = \tilde{\tau}\{a, b\} \cap \tilde{\tau}\{b, c\} = \{\tau(a), \tau(b)\} \cap \{\tau(b), \tau(c)\} = \{\tau(b)\}$ ve bu yüzden $\sigma(b) = \tau(b)$.

$\phi \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ olsun. Sonunda birim fonksiyonu bulmak için ϕ ve $\mathrm{Sym}(5)$'in bazı elemanlarının bileşkelerini alacağız. $\sigma \in \mathrm{Sym}(5)$'te $\phi\{1, 2\} = \tilde{\sigma}\{1, 2\}$ ve $\phi\{3, 4\} = \tilde{\sigma}\{3, 4\}$ koşullarını sağlayan bir s vardır. Böylece, ϕ yerine $\sigma^{-1}\phi$ alarak, ϕ'nin $\{1, 2\}$ ve $\{3, 4\}$ kenarlarınısabir tuttuğunu varsayabiliriz. Elbette ϕ, $\{3, 5\}$ ve $\{4, 5\}$ kenarlarını ya sabit tutmalı ya da değiştirmeli. $\mathrm{Sym}(5)$'teki (34) elemanını uygulayarak bu kenarlarında sabitlendiğini varsayabiliriz. Aynı şekilde ϕ, $\{1, 3\}$ ve $\{2, 3\}$ kenarlarını yabi sabit tutmalı ya da birbiriyle değiştirmeli. $\mathrm{Sym}(5)$'teki (12) elemanını uygulayarak bu kearlarında sabitlendiğini varsayabilirz.Bu son durumda tüm kenarlar sabit.