Dördüncü Kısım:

Gerçel Sayılar Yapısı

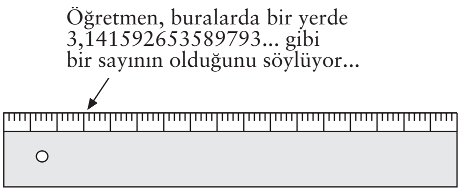
13. Gerçel Sayılar Kümesi

Nihayet gerçel sayıları tanımlayacağız. Bir sonraki bölümde gerçel sayılar üzerine dört işlemi ve sıralamayı tanımlayıp bunların özelliklerini irdeleyeceğiz.

Gerçel sayıların ne olduklarını sezgisel olarak hissediyoruz. Ayrıca ta ilkokuldan beri,

3,141592653589793...

gibi sonsuza dek uzanan bir ifadenin bir gerçel sayı olduğu öğretilmiştir bize. Biz de bunu sorgulamadan kabul etmişizdir. Hatta belki de öğretmen, bu sayının, "birim uzunluğu verilmiş bir sayı doğrusunun üstünde bir uzunluğa eş düştüğünü" söylemiş bile olabilir... Bu uzunluğun hangi noktalar arasındaki mesafe olduğunu göstermeden, daha doğrusu gösteremeden...



Öğretmenin dediğine göre, 0'dan

3,141592653589793... cm

ötede fiziksel bir nokta varmış... Öğretmen dediğine göre öyle bir nokta olmalı... Kitaplar da öyle diyor galiba... Bunca öğretmen, bunca kitap yalan mı söyleyecek?

Yalan değil ama yanlış... Cetvel üzerinde gerçekten öyle bir fiziksel noktanın olup olmadığını hiçbir zaman bilemeyiz. Parçalanamayacak parçacıklar olduğuna göre muhtemelen de öyle bir nokta yoktur. Ayrıca fiziksel nokta diye bir şeyin de ne olduğu bilinmemektedir...

Gerçel sayının (ne olduğunu değil, bu sorunun anlamı bile olamaz!) ne olması gerektiğini işte bu bölümde öğreneceğiz.

Önce, daha sonra terkedeceğimiz bir "gerçel sayı tanımlama" yöntemini açıklayalım.

Geçen bölümde

$$3{,}14159215921592\ldots$$

gibi bir zaman sonra devirleşen bir ifadeye anlam vermiştik. Bu ifadeyi tam tamına, terimleri

$$x_n = 3 + \sum_{i=1}^{n} a_i 10^{-i}$$

olarak tanımlanan dizinin limiti olarak tanımlamıştık. Burada $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$, $a_4 = 5$, $a_5 = 9$, $a_6 = 2$, $a_7 = 1$, ... dir. Bölüm 12A'da,

$$3{,}141592653589793\ldots$$

gibi sonsuza dek uzanan ve hiçbir zaman devirleşmeyen bir ifadeyi tanımlamamışsak da, terimleri

$$x_n = 3 + \sum_{i=1}^{n} a_i 10^{-i}$$

olarak tanımlanan dizinin temel dizi olduğu kanıtlanmıştık. Burada $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$, $a_4 = 5$, $a_5 = 9$, $a_6 = 2$, $a_7 = 6$, ... dır. (Yukardakinden değişik...)

Gerçel sayıları yukardaki temel diziler olarak tanımlayabiliriz. Bir a doğal sayısı ve bir zaman sonra sürekli 9 olmayan bir $(a_n)_n$ rakam dizisi için,

$$\left(a + \sum_{i=1}^{n} a_i 10^{-i}\right)_n$$

temel dizisini pozitif bir gerçel sayı olarak tanımlayabiliriz. (Bir zaman sonra sürekli 9 olan sayıları da kabul edersek, o zaman bu sayının başka türlü yazılan bir sayıya eşit olduğunu söylemek zorunda kalırız ve tanım zorlaşır.) Ardından, bu gerçel sayının da

$$a,a_1a_2a_3a_4a_5a_6...$$

olarak yazıldığını da söyleyebiliriz. Eğer zamanla devirleşen $(a_n)_n$ rakam dizilerinden elde edilen gerçel sayıları (yani temel dizileri), dizinin limiti olan kesirli sayıyla özdeşleştirirsek, her kesirli sayıyı bir gerçel sayı olarak görebiliriz. Sonra negatif gerçel sayılar bir biçimde tanımlanabilir. (İkinci kısımda $\mathbb{N}$'den hareketle $\mathbb{Z}$'yi tanımladığımız gibi.) Ardından gerçel sayılarda toplama, çıkarma, çarpma ve bölme tanımlamak gerekir... Kolay iş olmasa da bunlar yapılabilir.

Tüm bunlar matematiksel olarak son derece geçerlidir. Ancak biz böyle yapmayacağız. Çünkü bu yöntem 10 tabanını ön plana çıkarır ve 10'a haketmediği bir yer verir. Ayrıca bu yöntemle toplama çarpma gibi işlemleri tanımlamak oldukça meşakkatlidir. Biraz daha kuramsal ve soyut olacağız ama işlemler çok daha rahat ve şık tanımlanacak.

Her gerçel sayının kesirli bir temel dizinin limiti olduğunu artık hissetmiş olmalıyız. (Yoksa hissizsiniz demektir!) Buradan hareketle bir gerçel sayıyı kesirli bir temel dizi olarak tanımlamaya kalkışabiliriz. Ama aynı gerçel sayıya yakınsayan birçok temel dizi olabilir. Örneğin,

3, 3,1, 3,14, 3,141, 3,1415, 3,14159, 3,141592, ...

artan temel dizisiyle,

4, 3,2, 3,15, 3,142, 3,1416, 3,14160, 3,141593, ...

temel azalan dizisi aynı gerçel sayıya (henüz olmayan π'ye sanki!) yakınsarlar. Demek ki her temel diziyi bir gerçel sayı olarak tanımlarsak, aynı gerçel sayıdan binlerce olur!

Bu iki temel diziyi aynı gerçel sayı olarak tanımlamak lazım. Bunu yapmanın yöntemini biliyoruz, geçmişte gördük. Eşit gerçel sayıları simgelemesi gereken, yani gelecekte (gerçel sayılar tanımlandıklarında) aynı gerçel sayıya yakınsayacak olan iki temel dizi eşit değil de ***denk*** olsun...

Anımsarsanız temel diziler kümesini $\mathcal{C}$ harfiyle simgelemiştik. $\mathcal{C}$ kümesi üzerinde şöyle bir ikili ilişki tanımlamaya kalkışalım: $(x_n)_n, (y_n)_n \in \mathcal{C}$ için,

$$(x_n)_n \equiv (y_n)_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Güzel bir deneme... Ancak başarısız, çünkü

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

diye bir sayı (limit) henüz olmayabilir. (Gerçel sayıları daha tanımlamadığımızı anımsayın. Tüm derdimiz de bu sayıları var etmek zaten.) Örneğin yukarda örnek olarak verdiğimiz dizinin limiti yoktur çünkü π kesirli bir sayı değildir.

İlerde, gerçel sayılar tanımlandığında, aynı anlama gelecek bir başka tanım bulmalıyız.

$$(x_n)_n \equiv (y_n)_n \Leftrightarrow ?$$

Soru işareti yerine şu anki matematiksel bilgimizle ifade edebileceğimiz bir koşul bulmalıyız ve bu koşul, ilerde anlamı olacak olan

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

eşitliğiyle aynı anlamda olmalı. Ama bu çok basit... Yukardaki

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

eşitliği yerine,

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$$

yazalım... Bu ifade, ilerde, $\lim_{n\to\infty} x_n$ ya da $\lim_{n\to\infty} y_n$ olduğunda dilediğimiz

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

eşitliğiyle aynı anlamda olacak. Zaten öyle hissetmiyor muyuz?

Artık resmi tanımı verebiliriz: $(x_n)_n, (y_n)_n \in \mathcal{C}$ temel dizileri için, $\equiv$ ikili ilişkisini

$$(x_n)_n \equiv (y_n)_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$$

olarak tanımlayalım. Bir başka deyişle, $\equiv$ ikili ilişkisi, $x, y \in \mathcal{C}$ temel dizileri için,

$$x \equiv y \Leftrightarrow x - y \in \mathcal{Y}_0$$

olarak tanımlansın. Bu arada, $\mathcal{Y}_0$'ın Bölüm 9.6'da 0'a yakınsayan kesirli sayı dizileri kümesi olarak tanımlandığını da anımsayalım.

Şimdi bu ikili ilişkinin bir denklik ilişkisi olduğunu kanıtlayalım.

Önsav 13.1. *Yukarda tanımlanan* $\equiv$ *ikili ilişkisi bir denklik ilişkisidir. Yani her* $x, y \in \mathcal{C}$ *temel dizisi için,*

1. $x \equiv x$,

2. $x \equiv y$ *ise* $y \equiv x$,

3. $x \equiv y$ *ve* $y \equiv z$ *ise* $x \equiv z$.

Kanıt: Kanıtımızda $\mathcal{Y}_0$'ın $\mathcal{C}$ halkasının bir ideali olduğunu, yani Sonuç 11.7'de kanıtlanan,

a) $s(0) \in \mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{C}$,

b) $\mathcal{Y}_0 - \mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y}_0$,

c) $\mathcal{C}\mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y}_0$

olgularınu kullanacağız. ($s(0)$, sabit 0 dizisidir.) Bu da ideal kavramının önemini gösterir... diyeceğiz ama bu kanıtta (c)'nin hiç önemi olmayacak. (c) ilerde önem kazanacak.

(1), doğrudan (a) özelliğinden çıkar.

(2)'yi kanıtlayalım. Varsayıma göre $x - y \in \mathcal{Y}_0$. demek ki, (a) ve (b)'ye göre,

$$y - x = s(0) - (x - y) \in \mathcal{Y}_0,$$

yani $y \equiv x$.

Gelelim (3)'ün kanıtına... Varsayıma göre,

$$x - y \in \mathcal{Y}_0 \text{ ve } y - z \in \mathcal{Y}_0.$$

(b)'den dolayı, $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathcal{Y}_0$, yani $x \equiv z$. □

Her $a \in \mathcal{C}$ temel dizisi için,

$$[a] = \{x \in \mathcal{C} : a \equiv x\}$$

olsun. $\mathcal{C}$'nin bu altkümesine a'nın sınıfı denir.

$\mathcal{C}/\mathcal{Y}_0$ ya da eski yazılımla $\mathcal{C}/\equiv$, sınıfların kümesi olsun:

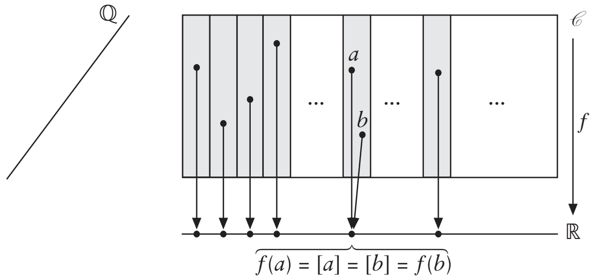
$$\mathcal{C}/\mathcal{Y}_0 = \mathcal{C}/\equiv = \{[a] : a \in \mathcal{C}\}$$

olsun. Gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'yi işte bu küme olarak tanımlayacağız:

$$\mathbb{R} = \mathscr{C}/\mathscr{Y}_0 = \mathscr{C}/\!\equiv\; = \{[a] : a \in \mathscr{C}\}.$$

Bir sonraki bölümde gerçel sayılarda dört işlemi ve sıralamayı tanımlayacağız. Bir de ayrıyeten kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$'yü $\mathbb{R}$'nin içine gömeceğiz.

$\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{R}$ şimdilik ayrık kümeler. Resim aşağıda.



$\mathscr{C}$, kesirli temel dizilerden oluşan küme.
$\mathbb{R}$ ise $\mathscr{C}$'nin denklik sınıflarından oluşan küme.

$\mathscr{C}$'nin içindeki gri kutular denklik sınıflarını temsil ediyor. Bu denklik sınıflarının her biri $\mathbb{R}$'nin bir elemanı, yani bir gerçel sayı. Bir sonraki bölümde sözünü edeceğimiz f fonksiyonu da $\mathscr{C}$'nin her elemanını o elemanının sınıfına götüren fonksiyon.