19A. Gerçel Sayıların Üsleri

Herhangi bir R halkasında, elemanların doğal sayı güçlerini alabiliriz. $r \in R$ ve pozitif bir n tamsayısı için r^n diye bir eleman tahmin edildiği gibi (n üzerine tümevarımla) şöyle tanımlanır:

$$r^1 = r,$$
$$r^{n+1} = rr^n = r^n r.$$

Yani r^n, r'nin kendisiyle n defa çarpılmasıyla elde edilen eleman anlamına gelir. Eğer $r \neq 0$ ise $r^0 = 1$ olarak tanımlanır da 0^0 bazen 1 olarak tanımlanır bazen de tanımsız olarak kabul edilir, yazarına, yazısına ve kitabına göre değişir. Biz bu yazılık $0^0 = 1$ tanımını kabul edelim. Ne yararını ne de zararını göreceğiz: Her n doğal sayısı için,

$$r^0 = 1,$$
$$r^{n+1} = rr^n = r^n r.$$

Eğer R bir cisimse, ya da cisim olmasa da r, R'de tersinirse, o zaman $n \geq 0$ için, $r^{-n} = (r^n)^{-1} = (r^{-1})^n$ olarak tanımlanır. Bu tanımla, her $n, m \in \mathbb{Z}$ için,

$$r^{n+m} = r^n r^m$$
$$(r^n)^m = r^{nm}$$

eşitlikleri doğrudur. Bunların kanıtları çok kolay ve standarttır, dolayısıyla okura bırakılmıştır. Okurun ayrıca değişmeli her halkada geçerli olan binom açılımını bildiğini de varsayacağız. Ayrıca sıralı halkalarda,

$$0 \le r \le s \text{ ve } n > 0 \text{ için } 0 \le r^n \le s^n \text{ olur}$$

gibi standart önermeleri de varsayıyoruz.

Bizim bu bölümdeki amacımız, bir $q \in \mathbb{Q}$ için r^q diye bir eleman tanımlamak. Eğer $n \in \mathbb{N}$ için $r^{1/n}$ diye bir sayı tanımlayabilirsek, o zaman,

$$r^{m/n} = (r^{1/n})^m$$

tanımını yapabiliriz. (Sahi yapabilir miyiz! Aşağıdaki gri kutucuğa bakın). $r^{m/n}$'den şimdilik vazgeçip $r^{1/n}$ diye bir eleman tanımlamaya çalışalım. Tanımı şöyle yapmayı deneyelim:

$$r^{1/n} = s \Leftrightarrow s^n = r.$$

Bu doğal tanım denemesine göre, eğer R'de $s^n = r$ eşitliğini sağlayan bir s varsa, $r^{1/n}$ diye bir elemanı s olarak tanımlayabiliriz. Ama acele etmeyelim, eğer R'de $s^n = r$ eşitliğini sağlayan birden çok s varsa o zaman $r^{1/n}$ diye tanımlayacağımız elemanı R'nin $s^n = r$ eşitliğini sağlayan s elemanlarının arasından seçmeliyiz. Rasgele bir seçim yapmak matematikte çoğunlukla bir sorun teşkil ettiğinden, mümkünse bu seçimi en doğal biçimde yapmak isteriz. Eğer R sıralıysa ve işimizi görecek birden çok s varsa, bu s'ler arasından en büyüğünü seçmek doğal bir seçim olarak kabul edilebilir. Örneğin, gerçel sayılarda $s^2 = 2$ eşitliğini sağlayan iki sayı vardır ve 2'nin karekökü olarak bunlardan en büyüğünü (pozitif olanını) seçeriz.

Örneğin $\mathbb{R}$'de vuku bulan

$$-1 = (-1)^{1/3} = (-1)^{2/6} = ((-1)^{1/6})^2 = (\text{yok})^2$$

sorunundan dolayı $r^{m/n} = (r^{1/n})^m$ tanımı sorunludur.

$$-1 = (-1)^{1/3} = (-1)^{2/6} = ((-1)^2)^{1/6} = 1^{1/6} = 1$$

sorunundan dolayı $r^{m/n} = (r^m)^{1/n}$ tanımı da en hafif deyimiyle rahatsız edicidir. $x^{1/3}$ sayısı, $x \mapsto x^3$ eşleşmesinin tersi olarak tanımlanabilir.

Eğer $r < 0$ ise $s^2 = r$ eşitliğini sağlayan bir s'nin olamayacağını biliyoruz (sıralı halkalarda kareler negatif olamazlar, bkz Önsav 6A.6.vi), dolayısıyla eğer n çiftse, $s^n = r$ eşitliğini sağlayan bir s de olamaz. Dolayısıyla $\mathbb{R}$'nin negatif olmayan sayılarına odaklanalım.

Teorem 19A.1. *$r \geq 0$ bir gerçel sayıysa ve $n > 0$ bir doğal sayıysa, $s^n = r$ eşitliğini sağlayan bir $s \geq 0$ gerçel sayısı vardır.*

Kanıt: Teorem $\mathbb{Q}$'de doğru olmadığından, kanıtta $\mathbb{R}$'ye özgü olan özellikleri kullanmalıyız.

Elbette $r > 0$ ve $n > 1$ varsayımlarını yapabiliriz.

Ayrıca $r \neq 1$ varsayımını da yapabiliriz.

Bir de ayrıca $r > 1$ varsayımını yapabiliriz, çünkü eğer teorem, 1'den büyük sayılar için kanıtlanmışsa, 1'den küçük sayılar için de kanıtlanmış olur. Nitekim, eğer $0 < r < 1$ ise, o zaman $1 < 1/r$'dir, dolayısıyla eğer $s^n = 1/r$ eşitliğini sağlayan bir s bulunmuşsa, $(1/s)^n = r$ eşitliği de sağlanır. Bundan böyle $r > 1$ olsun.

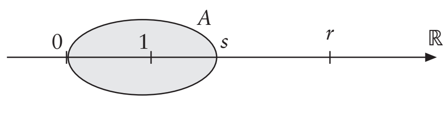
Şimdi asıl kanıta girişelim.

$$A = \{x \in \mathbb{R}^{\geq 0} : x^n \leq r\}$$

olsun. ($\mathbb{R}^{\geq 0}$, $\mathbb{R}$'nin negatif olmayan elemanlarının kümesidir.) $0, 1 \in A$ olduğundan, A boşküme olamaz. Ayrıca

$$(1 + r)^n \geq 1 + rn > 1 + r > r$$

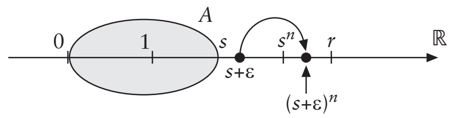
olduğundan, A üstten sınırlıdır. Demek ki A'nın $\mathbb{R}$'de bir en küçük üstsınırı vardır. (Dolayısıyla kanıt $\mathbb{Q}$'de geçersizdir.) Bu üstsınıra s diyelim. $s^n = r$ eşitliğini kanıtlayacağız. Bunun için, ne $s^n < r$ ne de $s^n > r$ eşitsizliğininin doğru olduğunu kanıtlayacağız.



Birinci Adım: $s^n < r$ *eşitsizliği doğru olamaz.*

Kanıt: $s^n < r$ eşitsizliğini varsayalım. Öyle bir $\varepsilon > 0$ bulacağız ki, $(s + \varepsilon)^n \le r$ olacak, yani $s < s + \varepsilon \in A$ olacak, ama s, A'nın en küçük üstsınırı olduğundan bu imkânsız...

$(s + \varepsilon)^n \le r$ eşitsizliğinin doğru olması için ε'un ne kadar küçük olması gerektiğini bulalım. Elimizdeki tek ipucu $0 < s^n < r$



eşitsizliği. Eğer böyle bir $\varepsilon > 0$ varsa, ε'u 1'den de küçükeşit seçebileceğimiz bariz. Bundan böyle, varlığını kanıtlamak istediğimiz ε'un 1'den küçükeşit olduğunu varsayalım. (Kafanız karışmışsa da okumaya devam edin. Özetle, $(s + \varepsilon)^n \le r$ eşitsizliğini sağlayan 1'den küçükeşit bir ε bulacağız.) $(s + \varepsilon)^n$ ifadesiyle oynamaya başlayalım:

$$(s+\varepsilon)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i}\varepsilon^i = s^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i}\varepsilon^i \overset{?}{\le} r$$

Doğruluğunu bilmediğimiz ≤ işaretinin üstüne bir soru işareti koyduk. Demek ki,

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i}\varepsilon^i \overset{?}{\le} r - s^n.$$

eşitsizliğini sağlayan bir ε arıyoruz. Yukardaki ifadenin sol tarafıyla (çok büyütmeden) oynayalım. Öncelikle $\varepsilon \le 1$ olacağından, $\varepsilon^i \le \varepsilon$'dur. Soldaki ifadede ε^i yerine ε koyarsak, daha büyük bir ifade buluruz ama ε sayesinde bu daha büyük ifadeyi de istediğimiz kadar küçültebiliriz.

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i}\varepsilon^i \le \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i}\varepsilon = \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i}\right) \overset{?}{\le} r - s^n.$$

Demek ki, soru işaretli eşitsizliği sağlayan bir ε bulmak yeterli. Ama bu çok kolay,

$$\varepsilon = \frac{r - s^n}{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i}}$$

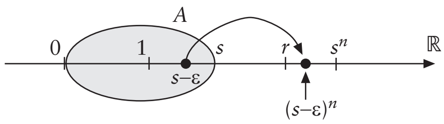
almak yeterli. Haaa... Unuttuk... ε'u 1'den küçükeşit yapmak gerekiyordu. O zaman, ε'u,

$$\frac{r - s^n}{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i}}$$

sayısıyla 1'in maksimumu seçelim. Birinci adım tamamlanmıştır.

İkinci Adım: $s^n > r$ *eşitsizliği doğru olamaz.*

Kanıt: $s^n > r$ eşitsizliğini varsayalım. Öyle bir $\varepsilon > 0$ bulacağız ki, $(s - \varepsilon)^n \geq r$ olacak, ama $s - \varepsilon$, s'den küçük olduğundan, $s - \varepsilon$, A'nın bir üstsınırı olamaz, dolayısıyla $s - \varepsilon < a$ koşulunu sağlayan bir $a \in A$ olmalı ve o zaman da $r \leq (s - \varepsilon)^n < a^n \leq r$ olur ve bir çelişki elde edilir.



$(s - \varepsilon)^n \geq r$ eşitsizliğinin doğru olması için ε'un ne kadar küçük olması gerektiğini bulalım. Elimizdeki tek ipucu $0 < r < s^n$ eşitsizliği. $(s - \varepsilon)^n$ ifadesiyle oynamaya başlayalım:

$$(s-\varepsilon)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} s^{n-i} \varepsilon^i = s^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} s^{n-i} \varepsilon^i \overset{?}{\geq} r.$$

ε'u soru işaretli yer doğru olacak biçimde seçmeye çalışacağız. Soru işaretli yeri düzenleyelim.

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i+1} s^{n-i} \varepsilon^i \overset{?}{\leq} s^n - r$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\varepsilon > 0$ bulmaya çalışıyoruz. Bütün -1'leri atarsak, soldaki ifadeden daha büyük bir ifade buluruz. Ayrıca ε'u 1'den küçükeşit seçmeyi kabul edersek, ε^i'lerin yerine daha büyük olan ε koyabiliriz:

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i+1} s^{n-i} \varepsilon^i \leq \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i} \varepsilon^i$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i} \varepsilon = \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i} \right) \overset{?}{\leq} s^n - r .$$

Soru işaretli eşitsizliğin doğru olduğu bir $0 < \varepsilon \leq 1$ seçebilir-miyiz. Evet: ε,

$$\frac{s^n - r}{\left(\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}s^{n-i}\right)}$$

sayısıyla 1'in maksimumu olsun. İkinci adım da tamamlanmış ve böylece teorem tamamen kanıtlanmıştır. □

Teorem 19A.2. *r bir gerçel sayı ve $n > 0$ bir doğal sayı olsun.*

n tekse, $s^n = r$ eşitliğini sağlayan bir tek s gerçel sayısı vardır.

$r > 0$ ve n çiftse, biri negatif diğeri pozitif olmak üzere $s^n = r$ eşitliğini sağlayan iki tane s gerçel sayısı vardır.

$r < 0$ ve n çiftse, $s^n = r$ eşitliğini sağlayan gerçel sayı yoktur.

Kanıt: Önce, $r > 0$ *ise*, $s^n = r$ eşitliğini sağlayan bir tane pozitif s gerçel sayısı olduğunu kanıtlayalım. Bunun için, "$0 < s < t$ ise $s^n < t^n$" önermesini kanıtlamak yeterli. Bu da her sıralı halkada geçerlidir ve kanıtı çok basittir.

Eğer n çiftse ve s, $s^n = r$ eşitliğini sağlıyorsa, $-s$ de aynı eşitliği sağlar. Demek ki $s^n = r$ eşitliğini sağlayan sayılar negatif ve pozitif olmak üzere eşit sayıda dağılmışlardır. Yukarda kanıtlanandan bu eşitliği sağlayan en az iki s olduğu çıkar. Üçüncüsünün olamayacağı da yukardakinden çıkar.

Eğer n tekse, o zaman "$s < t$ ise $s^n < t^n$" önermesi her sıralı halkada geçerlidir ve kanıtı çok basittir. Bundan da bu durumda $s^n = r$ eşitliğini sağlayan bir tek s gerçel sayısı olduğu çıkar.

Sonuç 19A.3. *$r \geq 0$ bir gerçel sayıysa $n > 0$ bir doğal sayıysa, $s^n = r$ eşitliğini sağlayan bir tek pozitif s gerçel sayısı vardır.*

Biricik olan bu s sayısını $r^{1/n}$ olarak yazalım. Bu tanımda $r \geq 0$ ve $n > 0$'dır. Bir de şu tanımı yapalım: Eğer $r > 0$ ise,

$$r^{1/(-n)} = (r^{1/n})^{-1}.$$

Ve şimdi $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ ve $r > 0$ için,
$$r^{m/n} = (r^m)^{1/n}$$
tanımını yapalım. Bu tanımın geçerli bir tanım olması için sınanması gereken önerme şudur:

$m, n, u, v \in \mathbb{Z}$, $n, q \neq 0$ ise ve $m/n = u/v$ ise, o zaman,
$$(r^m)^{1/n} = (r^u)^{1/v}$$
eşitliği geçerlidir.

Bunun kanıtını meraklı okura bırakıyoruz. Böylece her $q \in \mathbb{Q}$ kesirli sayısı ve her $r \in \mathbb{R}^{>0}$ için, r^q gerçel sayısı tanımlanmış olur. Bu arada r^0 sayısının 1 olarak tanımlandığına dikkatinizi çekerim. Eğer $q > 0$ ise, $0^q = 0$ tanımı da yapılabilir. $0^0 = 1$ tanımının ne bir önemi ne de bir sakıncası vardır.

Teorem 19A.4. *Eğer $q \neq 0$ ise, $r \mapsto r^q$ olarak tanımlanan*
$$\mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}^{>0}$$
fonksiyonu bir eşlemedir. Eğer $q > 0$ ise bu fonksiyon sıralamayı korur, yoksa ters çevirir. Ayrıca, her $p, q \in \mathbb{Q}$ ve her $r, s > 0$ için,
$$r^p r^q = r^{p+q},$$
$$(r^p)^q = r^{pq},$$
$$r^p s^p = (rs)^p$$
eşitlikleri doğrudur.

Yukardaki kanıtlarda sadece ve sadece $\mathbb{R}$'nin tamlığını ve Arşimet olduğunu kullandık. Dolayısıyla çok daha genel bir teorem doğrudur.

Teorem 19A.5. *Yukardaki teoremlerin her biri $\mathbb{R}$ yerine Arşimet özelliği olan sıralı bir tam cisimde de doğrudur. Demek ki böyle bir R cisminde*
$$\{x \in R : x \geq 0\} = \{x^2 : x \in R\}$$
eşitliği doğrudur.

Bu arada $r, s \in \mathbb{R}^{>0}$ için, r^s diye bir sayı tanımlamadığımızı özellikle belirtiriz. Örneğin, şimdilik $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ diye bir sayı yoktur. Hatta $2^{\sqrt{2}}$ diye bir sayı da yoktur henüz, en azından bu notlarda tanımlanmamıştır. Bu ifadeleri tanımlamadan tanımlanmış gibi kullanabilen kitaplara ve yazarlarına burada alenen hayranlıklarımızı ifade ederiz.