BÖLÜM 1

BAĞINTILAR - DENKLİK BAĞINTILARI - ZORN LEMMASI

Bu bölümü bitirdiğinizde,

- bağıntı kavramının matematiksel tanımını ve örnekleri
- yansıma, simetri, ters-simetri, geçişme özellikleri
- denklik bağıntısı, denklik sınıfları
- parçalanış, denklik bağıntısı ve parçalanışlar arasındaki ilişki
- kısmi sıralama bağıntısı, zincir, Zorn Lemması
- İyi Sıralama İlkesi, Seçme Beliti

konularında bilgi sahibi olabileceksiniz.

BÖLÜM 1

BAĞINTILAR - DENKLİK BAĞINTILARI - ZORN LEMMASI

Okuyucunun, bağıntı kavramına yabancı olmadığını kabul ediyoruz. Bununla beraber, bağıntı kavramının matematiksel tanımı ile başlamayı uygun buluyoruz.

Tanım 1. K ve L kümelerinin kartezyen çarpımı olan $K \times L$ nin her altkümesine K dan L ye bir *bağıntı* denir. Eğer $K = L$ ise, K dan K ya bağıntı yerine K *içinde bağıntı* veya K *üzerinde bağıntı* deyimleri kullanılır. $\square$

Bu bağlamda, her fonksiyonun bir bağıntı olduğunu anımsayalım. Tanım kümesi K ve değerler kümesi L olan bir fonksiyon, K kümesindeki her x elemanı için birinci bileşeni x olan bir ve yalnız bir sıralı ikili içeren, K dan L ye bir bağıntı demektir.

Tanım 2. β, K dan L ye bir bağıntı ve $(x, y) \in \beta$ ise, x ve y elemanları β *bağıntısıyla bağlıdır* denir ve $x\beta y$ yazılır; $(x, y) \notin \beta$ ise, $x \not\beta\, y$ yazılır. $\square$

Bu bölümte, bir K kümesi içinde bağıntıları ele alacağız.

Örnek 1. $\mathbb{R}$ içinde, $\leq$ ile gösterilen *küçük veya eşit olma* bağıntısı, iyi bilinen bir bağıntıdır. $x, y \in \mathbb{R}$ için x sayısı y den küçük veya y ye eşit ise, $x \leq y$ yazıldığını anımsayınız. Tanım 2'de verilen gösterimlerle, $2 \leq 3$, $3 \leq 3$, $4 \not\leq 3$ tür. $\square$

Örnek 2. Belli bir kümeler topluluğu içinde, $\subseteq$ ile gösterilen *altküme olma* bağıntısı da iyi bilinen bir bağıntıdır. Tanım 2'de verilen gösterimlerle, $\{0,1\} \subseteq \{-1,0,1\}$, $\{1,2\} \not\subseteq \{-1,0,1\}$ dir. $\square$

Örnek 3. $\mathbb{R}^+$ içinde herhangi x ve y sayılarının tam kısımları aynı ise, $x\ \beta\ y$ tanımlayalım. Böylece elde edilen β bağıntısına göre, $\frac{7}{2}\ \beta\ \frac{10}{3}$, $\frac{10}{3}\ \beta\ \frac{7}{2}$, $\pi\ \beta\ \frac{7}{2}$ ve $\pi\ \not\beta\ 4$ tür.

Bağıntılar, çeşitli özellikleriyle kendi içlerinde ayrışırlar. Ayrıştırıcı özelliklerden bazıları aşağıda tanımlanmıştır.

Tanım 3. K bir küme ve β, K üzerinde bir bağıntı olsun.

- Her $x \in K$ için $x\beta x$ ise, β nın *yansıma* özelliği vardır denir.
- $x, y \in K$ ve $x\beta y$ olunca, daima $y\beta x$ oluyorsa, β nın *simetri* özelliği vardır denir.
- $x, y \in K$, $x\beta y$ ve $y\beta x$ olunca, daima $x = y$ oluyorsa, β bağıntısının *ters-simetri* özelliği vardır denir.
- $x, y, z \in K$, $x\beta y$ ve $y\beta z$ olunca, daima $x\beta z$ oluyorsa, β nın *geçişme* özelliği vardır denir. $\square$

Örnek 4. $\mathbb{R}$ üzerinde $\leq$ ve kümelerde $\subseteq$ bağıntılarının, yansıma, geçişme ve ters-simetri özellikleri vardır. $\mathbb{R}^+$ üzerinde, Örnek 3'te tanımlanan β bağıntısının, yansıma, simetri ve geçişme özellikleri bulunduğu kolayca görülebilir. Bunlardan herhangi biri hakkında kuşkusu olan okuyucuya kuşku duyduğu noktaları düşünmesi ve kuşkusunu gidermenin yollarını araması tavsiye olunur. Örneğin, $\mathbb{R}^+$ üzerindeki β bağıntısının geçişme özelliği için $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ ise ve x ile y nin, y ile z nin tam kısımları aynı ise, x ile z nin de tam kısımlarının aynı olması gerektiğinin algılanması gibi. $\square$

Uyarı 1. Ters-simetri özelliğinin tanımında; $x, y \in K$ için $x\beta y$ ve $y\beta x$ olması gerektiği yolunda bir koşul yoktur; eğer $x\beta y$ ve $y\beta x$ ise, $x = y$ olması istenmektedir. K nın iki elemanı x ve y için $x\beta y$ ve $y\beta x$ ten sadece biri geçerli olabileceği gibi, hiçbiri de geçerli olmayabilir. Benzer şekilde, geçişme özelliğinin tanımında; $x, y, z \in K$ için $x\beta y$ ve

$y\beta z$ olması gerektiği yolunda bir koşul yoktur; eğer $x\beta y$ ve $y\beta z$ ise, $x\beta z$ olması istenmektedir. □

Matematikte, belli bir ortamda tamamen farklı kabul edilen iki nesne başka bir ortamda denk ya da eşit kabul edilebilirler. Örneğin, günlük aritmetikte, 1+1 ve 3+4 kuşkusuz farklı sayılardır; ancak 5 modülüne göre modüler aritmetikte bunlar denktir. Düzlemde, yönleri ve uzunlukları aynı olan iki yönlendirilmiş doğru parçası, nerede yerleşmiş olurlarsa olsunlar, birbirlerine denk kabul edilerek *vektör* kavramı tanımlanır. Düzlemde, eşlenik (veya özdeş) üçgenler için aynı şey söylenebilir. Bu örnekler elbette çoğaltılabilir. Bu durumu matematiksel bir tabana oturtmak için gereken temel kavram, *denklik bağıntısı* kavramıdır ve aşağıda tanımlanmıştır.

Tanım 4. K bir küme ve β, K üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer β nın yansıma, simetri ve geçişme özellikleri varsa, β ya bir *denklik bağıntısı* denir. □

Örnek 5. $\mathbb{R}$ üzerinde Örnek 3'te tanımlanan β bağıntısı, bir denklik bağıntısıdır. □

Tanım 5. K bir küme; β, K üzerinde bir denklik bağıntısı ve $x \in K$ olsun. Bu takdirde,

$$[x]_\beta = \{\ y \in K : \quad y\beta x \ \ \}$$

kümesine K nın β bağıntısına göre bir *denklik sınıfı* ve x elemanına da bu denklik sınıfının bir *temsilci*si denir. K nın β bağıntısına göre denklik sınıflarından oluşan küme, K/β ile gösterilir. Her $i \neq j$ için $x_i \not\beta\, x_j$ olmak üzere

$$K/\beta = \{[x_i]_\beta : x_i \in K,\ i \in I\}$$

ise, $\{x_i \in K : i \in I\}$ kümesine K/β nın *tam temsilciler kümesi* denir. □

Örnek 6. Tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$ üzerinde; $x, y \in \mathbb{Z}$ için

$$x\beta y \Longleftrightarrow x - y \text{ çift};$$

başka bir ifadeyle

$$\beta = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z} \ , \ x - y \quad \text{çift}\}$$

olarak tanımlanan β, bir denklik bağıntısıdır. Gerçekten,

$x - x = 0$ çift olduğundan, her $x \in \mathbb{Z}$ için $x\beta x$; $x - y$ çift ise, $y - x$ de çift olduğundan, $x\beta y$ olunca, daima $y\beta x$ olur; $x - y$ ve $y - z$ çift ise, $x - z$ çift olur ve böylece, $x\beta y$, $y\beta z$ olunca, daima $x\beta z$ olur. Bu denklik bağıntısı için tam iki tane denklik sınıfı vardır:

$$[0]_\beta = \{0, 2, -2, 4, -4, \cdots\} = [2]_\beta = [-4]_\beta,$$

$$[1]_\beta = \{1, -1, 3, -3, 5, -5, \cdots\} = [-1]_\beta = [3]_\beta.$$

Böylece $\mathbb{Z}/\beta = \{[0]_\beta, [1]_\beta\}$ dır ve $\{0 \ , \ 1\}$ kümesi, $\mathbb{Z}/\beta$ nın tam temsilciler kümesidir. Ayrıca, $[0]_\beta \cup [1]_\beta = \mathbb{Z}$, $[0]_\beta \cap [1]_\beta = \emptyset$ olduğu açıktır. $\square$

Yukarıdaki örnekte gözlenen son özellikler, herhangi bir denklik bağıntısı için de doğrudur. Bunu kanıtlamak için aşağıdaki lemmadan yararlanacağız.

Lemma 1. *K bir küme, β onun üzerinde bir denklik bağıntısı ve $x, z \in K$ olsun. Bu takdirde,*

$$(i) \quad x \in [x]_\beta, \qquad\qquad (ii) \quad x\beta z \Longleftrightarrow [x]_\beta = [z]_\beta$$

dır.

Kanıt. (i) şıkkı, yansıma özelliğinin sonucudur. (ii) şıkkının kanıtı için, $x\beta z$ kabul edelim ve $y \in [x]_\beta$ alalım. O zaman, denklik sınıfı tanımından, $y\beta x$ ve geçişme özelliğinden, $y\beta z$ olur; dolayısıyla, $y \in [z]_\beta$ olması gerekir. Böylece, $x\beta z$ ise, $[x]_\beta \subseteq [z]_\beta$ olduğunu gördük. Benzer biçimde, ya da simetri özelliği kullanılarak, $x\beta z$ ise, $[z]_\beta \subseteq [x]_\beta$ olduğu görülür. Sonuçta, $x\beta z$ ise, $[x]_\beta = [z]_\beta$ olduğu kanıtlanmış olur. Karşıt olarak, $[x]_\beta = [z]_\beta$ olduğunu kabul edelim. (i) şıkkından, $x \in [x]_\beta = [z]_\beta$ olduğunu biliyoruz. O halde, denklik sınıfı tanımından, $x\beta z$ dir. $\blacksquare$

Teorem 1. *K bir küme ve β, K üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. K içinde β ya göre iki denklik sınıfı ya ayrık ya da özdeştir.*

Kanıt. K içinde $[x]_\beta$ ve $[z]_\beta$ gibi iki denklik sınıfı alalım ve bunların, y ile göstereceğimiz bir ortak elemanı bulunduğunu varsayalım. O zaman, $y\beta x$ ve $y\beta z$ olur. Simetri ve geçişme özelliklerinden $x\beta z$ ve buradan da, Lemma 1 yardımıyla, $[x]_\beta = [z]_\beta$ olduğu görülür. Sonuç olarak, eğer $[x]_\beta$ ve $[z]_\beta$ ayrık değilse, yani $[x]_\beta$ ve $[z]_\beta$ nın ortak elemanları varsa, bu denklik sınıfları özdeştir. ■

Sonuç 1. *K bir küme ve β , K üzerinde bir denklik bağıntısı ise,*

(*i*) $\bigcup_{x\in K} [x]_\beta = K$,

(*ii*) *her $x, z \in K$ için ya $[x]_\beta = [z]_\beta$ ya da $[x]_\beta \cap [z]_\beta = \emptyset$*

dir. ■

Bu sonuç, denklik bağıntısı kavramının aşağıda tanımlanan *parçalanış* kavramıyla yakından bağlantılı olduğunu göstermektedir.

Tanım 6. K bir küme ve $\mathcal{P} = \{K_i : i \in I\}$, K nın bazı altkümelerinin bir topluluğu olsun. Eğer aşağıdaki üç koşul sağlanırsa, $\mathcal{P}$ ye K nın bir *parçalanış*ı ve K_i lerden her birine bu parçalanışın bir *hücre*si denir:

(*i*) Her $i \in I$ için $K_i \neq \emptyset$.

(*ii*) $\bigcup_{i\in I} K_i = K$.

(*iii*) Her $i \neq j$ için $K_i \cap K_j = \emptyset$. □

Örnek 7. $K = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ için $K_1 = \{0\}$, $K_2 = \{2, 4\}$, $K_3 = \{1, 3\}$ altkümeleri, K nın bir parçalanışını oluştururlar. □

Sonuç 1 e göre, β, K üzerinde bir denklik bağıntısı ise, K/β , K nın bir parçalanışıdır. Denklik bağıntıları ile parçalanışlar arasındaki ilişki, aşağıdaki teoremde ifadesini bulmaktadır.

Teorem 2. *K bir küme, K üzerindeki tüm denklik bağıntılarının kümesi $\mathbf{D}(K)$ ve K nın tüm parçalanışlarının kümesi $\mathbf{P}(K)$ olsun. Bu* *takdirde,*

$$f : \mathbf{D}(K) \longrightarrow \mathbf{P}(K) \quad , \quad \beta \longrightarrow K/\beta$$

bire-bir ve örten bir fonksiyondur.

Kanıt. f, iyi tanımlıdır. $\beta, \beta' \in \mathbf{D}(K)$ ve $K/\beta = K/\beta'$ ise, $\beta = \beta'$ dür. Dolayısıyla, f, birc-bir fonksiyondur. Diğer yandan, $\mathcal{P} = \{K_i : i \in I\}$, K nın bir parçalanışı ise, K üzerinde, $K/\beta = \mathcal{P}$ olacak biçimde bir denklik bağıntısı, β, tanımlayabiliriz. Gerçekten,

$$\beta = \{(x, y) : x \text{ ve } y \text{ aynı hücrededir}\}$$

ile tanımlanan β, bir denklik bağıntısı olur ve $K/\beta = \mathcal{P}$ dir. ∎

Bir K kümesinin herhangi bir $\mathcal{P} = \{K_i : i \in I\}$ parçalanışı ve bu parçalanıştaki her K_i hücresinin kardinalitesi, $|K_i|$, bilindiği takdirde, K nın kardinalitesi

$$|K| = \sum_{i \in I} |K_i|$$

formülü ile hesaplanabilir. Özel olarak, β, K kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı ve $\{x_i : \ x_i \in K, \ i \in I\}$, β ya göre tam temsilciler kümesi ise,

$$|K| = \sum_{i \in I} |[x_i]_\beta|$$

olur.

Çalışmalarımızda sıkça karşılaşacağımız bağıntılar arasında kısmi sıralama bağıntıları vardır.

Tanım 7. K bir küme ve β, K üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer β nın yansıma, ters-simetri ve geçişme özellikleri varsa, β ya bir *kısmi sıralama bağıntısı* denir. Üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı bulunan bir kümeye *kısmi sıralı küme* denir. □

Örnek 8. $\mathbb{R}$ üzerinde $\leq$ ve kümelerde $\subseteq$ bağıntıları, kısmi sıralama bağıntılarıdır. □

En çok karşımıza çıkan kısmi sıralama bağıntısı, sayılarda $\leq$ bağıntısı olduğundan, bundan sonraki genel tartışmalarımızda, aksi belirtilmedik çe, kısmi sıralama bağıntılarını $\leq$ ile göstereceğiz. $x \leq y$ yerine bazen $y \geq x$ yazılır. $x \leq y$ fakat $x \neq y$ ise, $x < y$ yazılır.

Tanım 8. K, $\leq$ ile kısmi sıralı bir küme, $x, y \in K$ olsun. Eğer $x \leq y$ veya $y \leq x$ den en az biri doğru ise, x ve y elemanları *karşılaştırılabilir* elemanlardır denir. $\mathcal{Z} \subseteq K$ ise ve her $x, y \in \mathcal{Z}$ için x ve y karşılaştırılabilir elemanlar ise, $\mathcal{Z}$ ye K içinde bir *zincir* denir. □

Örnek 9. K, $\mathbb{Z}$ nin tüm altkümelerinden oluşan, $\subseteq$ ile kısmi sıralı küme, $A_1 = \{-1, 0\}$, $A_2 = \{-1, 0, 1\}$, $A_3 = \{-1, 0, 1, 2\}$, $A_4 = \{-2, -1, 0\}$ omak üzere $\mathcal{Z} = \{A_1, A_2, A_3\}$, $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ olsun. $\mathcal{Z}$ bir zincirdir, fakat $\mathcal{A}$ zincir değildir(Neden?). □

Tanım 9. K bir kısmi sıralı küme, $\mathcal{A} \subseteq K$; $a, b, m \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer her $x \in \mathcal{A}$ için $a \leq x$ ise, a elemanı $\mathcal{A}$ nın *en küçük elemanı*dır denir. Benzer şekilde, eğer her $x \in \mathcal{A}$ için $x \leq b$ ise, b elemanı $\mathcal{A}$ nın *en büyük elemanı*dır denir. Eğer $\mathcal{A}$ içinde $m \leq x$ olan yegane eleman $x = m$ ise, m elemanı $\mathcal{A}$ nın bir *maksimal elemanı*dır denir. □

Tanım 10. K bir kısmi sıralı küme, $\mathcal{A} \subseteq K$ ve $u \in K$ olsun. Eğer her $x \in \mathcal{A}$ için $x \leq u$ ise, u elemanı $\mathcal{A}$ nın bir *üstsınırı*dır denir. Eğer u, $\mathcal{A}$ nın bir üstsınırı ise ve $\mathcal{A}$ nın her üstsınırı v için $u \leq v$ ise, u elemanı $\mathcal{A}$ nın *en küçük üstsınırı*dır denir. □

Örnek 10. Örnek 9'da verilen K ve onun altkümesi olan $\mathcal{A}$ yı düşünelim. Burada, A_2 ve A_4 karşılaştırılamaz elemanlardır; A_1, $\mathcal{A}$ nın en küçük elemanıdır; $\mathcal{A}$ nın en büyük elemanı yoktur. $\mathcal{A}$ nın iki tane maksimal elemanı vardır: A_3 ve A_4. $\mathcal{A}$ nın K içinde bir üstsınırı, $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dir ve bu üstsınır, $\mathcal{A}$ nın K içindeki en küçük üstsınırıdır. □

Yukarıda verilen tanım ve örneklerden sonra ifade edeceğimiz *Zorn Lemması*, lemma olarak adlandırılmasına rağmen, kümeler kuramının *Seçme Beliti*'ne denk olan bir belitidir. Bu lemma, belli bir özelliğe göre maksimum veya en büyük olan küme veya yapıların varlığı kanıtlanmak istenince, özellikle sonsuz çoklukta küme veya yapı söz konusu olduğunda, yararlı olur.

Sonsuz boyutlu vektör uzaylarında taban, cisimlerde cebirsel kapanış, birimli bir halkada maksimal idealin varlığı, Zorn Lemması ile kolayca kanıtlanabilmektedir.

Zorn Lemması ile ispata sıcak bakmayan veya bu tür ispatlardan kaçınan matematikçiler de vardır.

Bu kitapta kapsanan konular için Zorn Lemması olmazsa olmaz bir araç değildir. Cisimlerin cebirsel genişlemeleri, cebirsel kapanış kullanılmadan da incelenebilir. Hatta $\mathbb{C}$ nin herhangi bir altcisminin veya bir sonlu cismin cebirsel kapanışının varlığı, Zorn Lemması kullanılmadan da gösterilebilir; fakat işler uzar. Bu nedenle, cebirsel kapanışın varlığının kanıtında, Zorn Lemması'nı kullanacağız ve bu belit ile ilgili bilgiyi burada özetlemek istiyoruz.

Zorn Lemması. *Boş olmayan kısmi sıralı bir küme içindeki her zincirin o küme içinde bir üstsınırı varsa, bu kısmi sıralı kümenin bir maksimal elemanı vardır.*

Yukarıda belirttiğimiz gibi, Zorn Lemması'nın ispatı söz konusu değildir.

Şimdi Zorn Lemması'na denk olan Seçme Beliti'nin ifadesini verelim.

Seçme Beliti. *Boş olmayan bir I kümesi ve her $i \in I$ için boş olmayan bir K_i kümesi verilmiş olsun. Bu takdirde, I dan $\bigcup_{i\in I} K_i$ ye tanımlı öyle bir $f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} K_i$ fonksiyonu vardır ki her $i \in I$ için $f(i) \in K_i$ dir.*

Zorn Lemması ve Seçme Beliti'ne denk olan bir belit daha vardır: *İyi Sıralama İlkesi.* Bu ilkenin ifadesi için aşağıdaki tanımlara gereksinim vardır.

Tanım 11. Eğer bir kısmi sıralı K kümesi, kendisi bir zincir ise, K nın sıralama bağıntısına *tümden sıralama* bağıntısı; K kümesine de *tümden sıralı küme* denir. Bir tümden sıralı kümenin boş olmayan her altkümesinin bir en küçük elemanı varsa, o kümeye *iyi sıralı küme* denir. □

İyi Sıralama İlkesi. *Boş olmayan bir K kümesi verilmiş olsun. K üzerinde öyle bir tümden sıralama bağıntısı vardır ki bu sıralama ile, K, iyi sıralı bir kümedir.* ■

Örnek 11. Bilinen sıralama ile, $\mathbb{N}$, iyi sıralı bir kümedir; $\mathbb{Z}$ ise iyi sıralı değildir(Neden?). $\mathbb{Z}$ nin aşağıda verilen sıralaması, tümden sıralamadır ve

bu sıralama ile, $\mathbb{Z}$, iyi sıralıdır:

$$0,\ 1, -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots\ , n,\ -n,\ \ldots$$

Burada, $x < y$ olması için gerek ve yeter koşul, x in y ye göre solda bulunmasıdır. □