CEVAPLAR

ALIŞTIRMALAR 12

1. σ iyi tanımlı,

$$\begin{aligned}\sigma((a,b)+(c,d)) &= \sigma(a+c,b+d) = (a+c)-(b+d)\\ &= (a-b)+(c-d) = \sigma(a,b)+\sigma(c,d);\end{aligned}$$

çek $(\sigma) = \{(a,b) : a = b\} = \{(a,a) : a \in \mathbb{Z}\}$.

3. $\sigma(f+g) = (f+g)(1) = f(1)+g(1) = \sigma(f)+\sigma(g)$;

çek $(\sigma) = \{f \in \mathbb{Z}[x] : f(1) = 0\}$.

5. a. $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ \sigma(x) = 2^x$ homomorfizm.

b. $\sigma : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ \sigma(x) = 2^{|x|}$ homomorfizm değil;

$\sigma(x+y) = 2^{|x+y|} \neq \sigma(x)+\sigma(y)$.

c. $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ \sigma(x) = 2|x|$ homomorfizm; değil;

$\sigma(x+y) = 2|x+y| \neq \sigma(x)\sigma(y)$.

d. $\sigma : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ \sigma(x) = 2x$ homomorfizm.

e. $\sigma : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*,\ \sigma(x) = x^2$ homomorfizm.

f. $\sigma : \mathbb{Z}_5^* \longrightarrow \mathbb{Z}_5^*,\ \sigma(x) = x^2$ homomorfizm.

7. $\sigma^{-1}(6) = \{13,\ 18,\ 23,\ 28,\ 3,\ 8\}$.

9. $< x >= \{x^k : k \in \mathbb{Z}\}$ ise, $f(< x >) = \{(f(x))^k : k \in \mathbb{Z}\}$ $=< f(x) >$.

11. $f(1) = b \in \mathbb{Z}_{12}$, $|b| \in \{1,2,3,6\}$, $b \in \{0,6,4,8,2,10\}$; 6 homomorfizm, örten olan yok.

13. $f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_k$, $f(1) = a \in \mathbb{Z}_k$, $|a| \in \mathbf{B}$. Her $d \in \mathbf{B}$ için $\mathbb{Z}_k$ içinde mertebesi d olan tam $\varphi(d)$ eleman vardır. O halde, $\mathbb{Z}_n$ den $\mathbb{Z}_k$ ya tam $\sum_{d \in \mathbf{B}} \varphi(d)$ tane homomorfizm vardır.

15. $\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_2$ den $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ e bir örten homomorfizm bulunsaydı, bu homomorfizmin çekirdeği $\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_2$ nin mertebesi 2 olan bir altgrubu, yani şu üç altgruptan biri olurdu: $H =< (0,1) >= \{(0,0),(0,1)\}$, $K =< (8,1) >= \{(0,0),(8,1)\}$, $N =< (8,0) >= \{(0,0),(8,0)\}$. Ancak, $\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_2\ /H \cong \mathbb{Z}_{16}$, $\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_2\ /K \cong \mathbb{Z}_{16}$ ve $\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_2\ /N \cong \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2$ olup bu bölüm gruplarından hiç biri $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ e izomorf değildir.

17. $|G/\ \text{çek}\ (\sigma)| = 12$, $|\ \text{çek}\ (\sigma)| = 5 \Longrightarrow |G| = 60$. $G/\ \text{çek}\ (\sigma) \cong \mathbb{Z}_{12}$ nin mertebesi t olan bir normal altgrubu H varsa, $\sigma^{-1}(H)$ de G nin mertebesi $5t$ olan bir normal altgrubudur. $G/\ \text{çek}\ \ (\sigma) \cong \mathbb{Z}_{12}$ nin mertebesi 1, 2, 3, 4, 6, 12 olan normal altgrupları bulunduğuna göre, G nin de mertebesi 5, 10, 15, 20, 30, ve 60 olan normal altgrupları vardır.

19. $H \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq G \Longrightarrow HK \trianglelefteq G$, $H \trianglelefteq HK$. İkinci izomorfizm teoremine göre $HK/K \cong K/H \cap K$ olduğundan, $(K : H \cap K) = (HK : H)$. Diğer yandan, $HK/H \leq G/H \Longrightarrow (HK : H) \mid (G : H)$.

21. **a)** $G/H = \{0 + H, 1 + H, 2 + H\}$.

b) G/K nın 12 elemanı şöyle listelenebilir: $\overline{0} = 0 + K$, $\overline{1} = 1 + K$, $\overline{2} = 2 + K$, $\overline{3} = 3 + K$, $\overline{4} = 4 + K$, $\overline{5} = 5 + K$, $\overline{6} = 6 + K$, $\overline{7} = 7 + K$, $\overline{8} = 8 + K$, $\overline{9} = 9 + K$, $\overline{10} = 10 + K$, $\overline{11} = 11 + K$. Diğer taraftan, $H/K = \{0 + N,\ 3 + N,\ 6 + N,\ 9 + N\}$ ve bu gösterimlerle, $(G/K)/(H/K) = \{\overline{0} + H/K,\ \overline{1} +\ H/K,\ \overline{2} + H/K\}$ dır.

c) $\sigma : G/H \longrightarrow (G/K)/(H/K)$, $\sigma(t + H) = \overline{t} + H/K$.