BÖLÜM 13

HALKALAR

Bu bölümü bitirdiğinizde,

- bir ikili işlemin diğer bir ikili işlem üzerinde sol ve sağ dağılma özellikleri
- halka ve althalka kavramları
- halka ve althalka örnekleri
- değişmeli halka
- birimli halka
- bir halkanın tersinir elemanları
- halkalarda binom teoremi

hakkında bilgi sahibi olabileceksiniz.

BÖLÜM 13

HALKALAR

Bu bölümde, iki ikili işleme sahip olan cebirsel yapıları ele alacağız. Gösterim kolaylığı sağlaması bakımından, bu ikili işlemlerden birini toplama, $(+)$, diğerini de çarpma, $(\cdot)$, işlemi olarak düşüneceğiz. Bir H kümesi ile bu küme üzerinde toplama, $(+)$, ve çarpma, $(\cdot)$, işlemlerinden oluşan cebirsel yapıyı, $< H, +, \cdot >$ ile göstereceğiz. Ayrıca, $x \cdot y$ çarpımı yerine, karışıklığa neden olmadığı takdirde, xy yazacağız.

Tanım 1. Bir cebirsel yapı, $< H, +, \cdot >$ verilmiş olsun. Eğer H kümesindeki her x, y, z elemanları için

$$x(y + z) = (xy) + (xz)$$

ise, $< H, +, \cdot >$'da *sol dağılma özelliği* vardır denir. Her $x, y, z \in H$ için

$$(x + y)z = (xz) + (yz)$$

ise, $< H, +, \cdot >$'da *sağ dağılma özelliği* vardır denir. □

$< \mathbb{N}, +, \cdot >$, $< \mathbb{Z}, +, \cdot >$, $< \mathbb{Q}, +, \cdot >$ ve $< \mathbb{R}, +, \cdot >$'da sol ve sağ dağılma özelliklerinin var olduğu çok iyi bilinmektedir.

Uyarı 1. $< H, +, \cdot >$ cebirsel yapısı verildiğinde, H nin elemanlarına "$+$" ve "$\cdot$" işlemleri uygulanarak elde edilen ifadelerde işlemlerin önceliği (örneğin, parantezler kullanılarak) belirtilmemişse, öncelik daima çarpma işlemine verilecektir. Örneğin, sol dağılma özelliğindeki $(xy) + (xz)$ ifadesi yerine $xy + xz$ de yazabiliriz ve bundan böyle bu şekilde yazacağız. □

Tanım 2. Bir cebirsel yapı, $< H, +, \cdot >$ verilmiş olsun. Aşağıdaki üç koşul sağlanırsa, $< H, +, \cdot >$ ya bir *halka* denir.

(h.1) $< H, + >$ bir değişmeli gruptur.

(h.2) $< H, \cdot >$ nın birleşme özelliği vardır.

(h.3) $< H, +, \cdot >$'da sol ve sağ dağılma özellikleri vardır. □

Örnek 1. $< \mathbb{Z}, +, \cdot >$, $< \mathbb{Q}, +, \cdot >$, $< \mathbb{R}, +, \cdot >$ ve $< \mathbb{C}, +, \cdot >$ nın her biri bir halkadır. □

Bir $< H, +, \cdot >$ halkasının toplama ve çarpma işlemlerinin neler olduğu iyi biliniyorsa, bu halkadan söz ederken, sadece "H halkası" deyimini kullanacağız. Örneğin, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ içinde toplama ve çarpma işlemlerinin neler olduğu herkesçe bilindiği için tamsayılar halkası $\mathbb{Z}$, rasyonel sayılar halkası $\mathbb{Q}$, reel sayılar halkası $\mathbb{R}$ veya karmaşık sayılar halkası $\mathbb{C}$ denince, hangi işlemlerden söz edildiği anlaşılır.

Bir H halkasının toplamsal grubu denince, $< H, + >$ anlaşılır. Toplamsal gruplar için kullandığımız gösterimleri H için de kullanmağa devam edeceğiz. Örneğin, $< H, + >$ nın birim elemanını 0_H, veya sadece 0 ile göstereceğiz ve H nin *toplamsal birim elemanı* diye adlandıracağız. H nin bir x elemanının toplamsal tersi, $(-x)$ ile gösterilecek ve $x, y \in H$ için $x + (-y)$ yerine $x - y$ yazılacaktır. H halkasının her x elemanı ve her n tamsayısı için nx ile, $< H, + >$ toplamsal grubunda x in n katı gösterilir.

Şimdi, halkalarla ilgili temel özellikleri bir teorem olarak ifade edelim.

Teorem 1. *H bir halka; H nin toplamsal birim elemanı $0_H = 0$; $x, x_1, \ldots, x_r, y, y_1, \ldots, y_s, z \in H$; $r, s \in \mathbb{N}$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu takdirde,*

(*i*) $x0 = 0x = 0$ *dır.*

(*ii*) $x(-y) = (-x)y = -(xy)$ *dir.*

(*iii*) $(-x)(-y) = xy$ *dir.*

(*iv*) $x(y - z) = xy - xz$ *ve* $(x - y)z = xz - yz$ *dir.*

(*v*) $x(y_1 + \cdots + y_s) = xy_1 + \cdots + xy_s$ *dir.*

(*vi*) $(x_1 + \cdots + x_r)y = x_1y + \cdots + x_ry$ *dir.*

(*vii*) $x(ny) = (nx)y = n(xy)$ *dir.*

(*viii*) $(\sum_{i=1}^{r} x_i)(\sum_{j=1}^{s} y_j) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} x_iy_j = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{r} x_iy_j$ *dir.*

Kanıt. (*i*) H içinde, $x0 = a$ tanımlayalım. Bu takdirde,

$$0 + a = a = x0 = x(0 + 0) = x0 + x0 = a + a$$

elde edilir. H toplamsal grubunda

$$0 + a = a + a \Longrightarrow a = 0$$

olacağından, $x0 = a = 0$ dır.

(*ii*) Dağılma özelliğinin ifadesi ve toplamsal ters eleman tanımından

$$x(-y)+xy = x((-y)+y) = x0 = 0\,,\ xy+x(-y) = x(y+(-y)) = x0 = 0$$

olduğu görülür. Böylece, $-(xy) = x(-y)$ dir. $(-x)y = -(xy)$ olduğu, benzer biçimde kanıtlanır.

(*iii*) Bundan önceki şıkkın doğrudan sonucudur:

$$(-x)(-y) = (-(-x))y = xy.$$

(*iv*) $x(y - z) = x(y + (-z)) = xy + x(-z) = xy + (-(xz)) = xy - xz$. $(x - y)z = xz - yz$ olduğu da benzer şekilde görülür.

(*v*) s üzerinde tümevarımla kanıtlanır.

(*vi*) r üzerinde tümevarımla kanıtlanır.

(*vii*) $x(\overbrace{y + \cdots + y}^{n\ tane})$ ifadesine (*v*) uygulanırsa, $x(ny) = n(xy)$ olduğu görülür. Benzer şekilde, (*vi*) kullanılarak, $(nx)y = n(xy)$ olduğu görülür.

(*viii*) $\sum_{i=1}^{r} x_i = a$ ve $\sum_{j=1}^{s} y_j = b$ olsun. (v) ve (vi) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{r} x_i)(\sum_{j=1}^{s} y_j) &= (\sum_{i=1}^{r} x_i)b = \sum_{i=1}^{r}(x_i b) \\
&= \sum_{i=1}^{r}(x_i(\sum_{j=1}^{s} y_j)) = \sum_{i=1}^{r}(\sum_{j=1}^{s}(x_i y_j)), \\
(\sum_{i=1}^{r} x_i)(\sum_{j=1}^{s} y_j) &= a(\sum_{j=1}^{s} y_j) = \sum_{j=1}^{s}(a y_j) \\
&= \sum_{j=1}^{s}((\sum_{i=1}^{r} x_i) y_j) = \sum_{j=1}^{s}(\sum_{i=1}^{r}(x_i y_j))
\end{aligned}$$

olduğu görülür. ■

Daha önce toplamsal gruplara örnek olarak gösterdiğimiz pek çok sayı kümesinin çarpma işlemi de hesaba katılınca birer halka oluşturduğunu Örnek 1'de gördük. Sayı kümeleri gibi, daha önce karşılaştığımız toplamsal gruplardan pek çoğunun toplama işlemi yanında bir çarpma işlemine de sahip olduklarına dikkat ettiniz mi? Aşağıda sunacağımız halka örneklerinin seçiminde bu husus göz önüne alınmıştır.

Örnek 2. $\mathbb{R}^{n\times n}$, matris toplamı ve matris çarpımı ile bir halkadır. □

Örnek 3. Her $n \geq 2$ için $< \mathbb{Z}_n, + >$ nın devirli, dolayısıyla, değişmeli grup olduğunu daha önce gördük. $< \mathbb{Z}_n, \cdot >$ genelde bir grup değildir, fakat birleşme özelliğine sahiptir. Ayrıca, $< \mathbb{Z}_n, +, \cdot >$'da sol ve sağ dağılma özelliklerinin bulunduğu kolayca görülebilir. Gerçekte bu, $< \mathbb{Z}, +, \cdot >$'da sağ ve sol dağılma özelliklerinden görülebilir. Örneğin, $x, y, z \in \mathbb{Z}_n$ için $\mathbb{Z}$ içinde sol dağılma özelliği ile $x(y+z) = xy + xz$ dir. Bölme algoritmasında bölüm ve kalanın tek türlü belirli olmasından, $\mathbb{Z}_n$ içinde de aynı eşitlik $x(y+z) = xy + xz$ geçerlidir, yani sol dağılma özelliği vardır. Sonuç olarak, $< \mathbb{Z}_n, +, \cdot >$ bir halkadır. □

Örnek 4. Üçüncü bölümde Örnek 3.4'te, $H = \mathcal{S}[a, b]$ nin toplamsal Abel grubu olduğunu görmüştük. Şimdi, $f, g \in \mathcal{S}[a, b]$ için fg yi şöyle tanımlayalım: $fg(x) = f(x)g(x)$, $x \in [a, b]$. Kolayca görülebilir ki

$\mathcal{S}[a,b]$, daha önce tanımlanmış olan toplama ve şimdi tanımladığımız çarpma işlemi ile bir halka olur. $\square$

Bu bölümün ikinci teoremi, halkalarda hesap yaparken büyük kolaylık sağlayan Binom Teoremi olacaktır. Bu bağlamda, k ve n tamsayılar, $0 \leq k \leq n$ ise, $0! = 1$ ve her $n \geq 1$ için $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$ olmak üzere binom katsayısı $\binom{n}{k}$ nın, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ olarak tanımlandığını anımsayınız. Binom katsayılarının temel özelliklerini bir önermede toplayalım:

Önerme 1. *k ve n tamsayılar, $0 \leq k \leq n$ olsun. Bu takdirde,*

(i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(ii) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

(iii) $\binom{n}{k}$ *bir pozitif tamsayıdır.*

(iv) p bir asal sayı ve $0 < k < p$ ise, $p \mid \binom{p}{k}$.

Kanıt. (i) Tanımın doğrudan sonucudur.

(ii) Tanım kullanılarak

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!\ (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\ (n-k-1)!}$$

$$= \frac{(k+1)n!}{(k+1)!\ (n-k)!} + \frac{(n-k)n!}{(k+1)!\ (n-k)!}$$

$$= \frac{(n+1)n!}{(k+1)!\ (n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\ (n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

(iii) $n = 0$ ve $n = 1$ için iddianın doğruluğu açıktır. n üzerinde tümevarım uygulayalım. $n > 1$ ve iddia n için doğru olsun.

$0 \leq k \leq n+1$ alalım. Eğer $k = n+1$ ise,

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{n+1} = 1$$

dir. Eğer $k < n+1$ ise, $k \leq n$ dir ve (ii) den

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

olur. $\binom{n}{k-1}$ ve $\binom{n}{k}$ her ikisi de pozitif tamsayı olduğundan, $\binom{n+1}{k}$ da bir pozitif tamsayıdır.

(iv) p bir asal sayı ve $0 < k < p$ ise, $1, 2, \cdots, k-1, k$ sayılarından her biri p ile aralarında asaldır. Diğer yandan, $\binom{p}{k}$ bir tamsayı olduğundan,

$$\binom{p}{k} = \tfrac{p!}{k!\ (p-k)!} = p\tfrac{(p-1)\cdots(p-k-1)}{1\cdot 2\cdots(k-1)\cdot k}$$

ifadesi, $p \mid \binom{p}{k}$ olduğunu gösterir. ∎

H bir halka; $a \in H$, $n \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq k \leq n$ ise, $\binom{n}{k}a$ ile a nın $\binom{n}{k}$ katını gösterdiğimizi; yani, $\binom{n}{k}a = \underbrace{a + \ \cdots \ + a}_{\binom{n}{k}\ kez}$ olduğunu anımsayınız.

Teorem 2 (Binom Teoremi). *H, bir halka; $n \in \mathbb{N}$; x, $y \in H$ ve $xy = yx$ olsun. Bu takdirde,*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

olur.

Kanıt. Teoremin $n = 1$ için doğruluğu açıktır ve kanıt, tümevarım la yapılabilir. $n > 1$ ve iddia n için doğru olsun. Bu takdirde,

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y x^k y^{n-k}$$

olur. Böylece $xy = yx$ olduğu ve Önerme $1(ii)$ kullanılarak,

$$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} + y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} [\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}] x^k y^{n-k+1} + y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$$

ile teoremin $n+1$ için de doğru olduğu görülür. ■

Gruplar için *altgrup* kavramı tanımlandığı gibi, her cebirsel yapı için *altcebirselyapı* kavramı tanımlanabilir. Gruplar için altgrup kavramının halkalar için karşılığı *althalka* kavramıdır.

Tanım 3. H bir halka, $A \subseteq H$ olsun. Eğer H nin ikili işlemleri A üzerinde de ikili işlem oluyor ve bu ikili işlemler ile A kendisi de bir halka oluyor ise, A ya H nin bir *althalka*sı denir. □

Bir altkümenin althalka olup olmadığını araştırırken tanımdaki tüm koşullara bakmaya gerek olmadığı açıktır. Aşağıdaki teorem, hangi koşullara bakılacağını belirtmektedir.

Teorem 3. *H bir halka ve $A \subseteq H$ olsun. A nın, H nin bir althalkası olması için gerek ve yeter koşullar,*

$$(i)\ \ 0 \in A \qquad\qquad (ii)\ \ x, y \in A \implies x - y \in A \ \ ve\ \ xy \in A$$

olmasıdır.

Kanıt. Eğer A , H nin althalkası ise, (i) ve (ii) nin sağlanacağı açıktır. Şimdi, (i) ve (ii) nin sağlandığını varsayalım. Önerme 4.1 den, $< A, + >$ nın bir toplamsal Abel grubu olduğu görülür. Ayrıca, (ii) den dolayı, çarpma işlemi, A üzerinde bir ikili işlem indirger ve Tanım 2 deki (h.2) ve (h.3) koşulları H için sağlandığından, A için de sağlanır. Böylece, H nin işlemleri ile, A kendisi de bir halka, dolayısıyla, H nin bir althalkasıdır. ∎

Örnek 5. Her H halkası için $\{0\}$ ve H, H nin althalkalarıdır. □

Örnek 6. $H = \mathbb{R}^{n\times n}$ için altüçgensel matrislerden oluşan

$$A = \{\ [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ 1 \leq i, j \leq n \text{ ve her } j > i \text{ için } a_{ij} = 0\},$$

H nin bir althalkasıdır. □

Örnek 7. Her $n \geq 1$ için $n\mathbb{Z} = \{nk : k \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{Z}$ nin bir althalkasıdır. □

Örnek 8. $A = \{f \in \mathcal{S}[0,1] : f(0) = 0\}$, $\mathcal{S}[0,1]$ in bir althalkasıdır. □

Okuyucu, alıştırmalarda daha çok halka ve althalka örnekleri bulacaktır.

Halka kavramını yeni öğrenenlerin en çok hata yaptıkları hususlardan biri, her H halkasını bir *çarpımsal* grup kabul etmeleridir. Bir H halkası için $< H, \cdot >$ nın çarpımsal grup olması gerekmez. Çünkü, $< H, \cdot >$ nın birim elemanı dahi bulunmayabilir.

Tanım 4. $< H, +, \cdot >$ halkası verilmiş olsun. Eğer $< H, \cdot >$

nın değişme özelliği varsa, H halkasına *değişmeli halka* denir. Benzer şekilde, eğer $< H, \cdot >$ nın birim elemanı varsa, H halkasına *birimli halka* denir. Eğer H birimli halka ise, $< H, \cdot >$ nın birim elemanına H nin *birim elemanı* denir ve bu eleman, 1_H ya da sadece 1 ile gösterilir. □

Birimli bir halkanın birim elemanının tek türlü belirli olduğunu biliyoruz(Bak. Teorem 2.2). Birimli bir halkanın bir elemanı çarpma işlemine göre (halka içinde) tersinir olmayabilir; ancak, tersinir bir elemanın tersi tek türlü belirlidir(Bak. Teorem 2.3). Bir halkanın toplama işlemine göre her elemanı tersinir olduğu için, birimli bir halkanın tersinir eleman(lar)ı denince, çarpma işlemine göre *tersinir* elemanları anlaşılır.

Örnek 9. $\mathbb{Z}$ halkası, birimli ve değişmeli bir halkadır; $\mathbb{Z}$ nin tersinir elemanları, -1 ve 1 den ibarettir. Her $n \geq 2$ için $\mathbb{Z}_n$ halkası, birimli ve değişmeli bir halkadır; $\mathbb{Z}_n$ nin tersinir elemanları, $\mathbb{Z}_n^*$ ı oluştururlar. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ halkalarının tersinir elemanlarının kümesi, sırasıyla, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ ve $\mathbb{C}^*$ dır. □

Yukarıdaki örneklerle de uyumlu olarak birimli bir halkanın tersinir elemanlarının kümesi H^* ile gösterilir. H^* ın bir çarpımsal grup olduğu açıktır.

Örnek 10. $2\mathbb{Z}$, birimli olmayan bir değişmeli halka örneğidir. $\mathbb{R}^{n\times n}$, matris toplamı ve matris çarpımı ile bir birimli halkadır. Bu halkanın tersinir elemanları, tersinir matrislerdir. Anımsayalım ki bir matrisin tersinir olması için gerek ve yeter koşullardan biri, o matrisin determinantının sıfırdan farklı olmasıdır. $\mathbb{R}^{n\times n}$ halkasının değişmeli olmadığını biliyoruz (Bak. Örnek 3.3). □

Örnek 11. Rasyonel katsayılı polinomların kümesi $\mathbb{Q}[x]$, reel katsayılı polinomların kümesi $\mathbb{R}[x]$ ile gösterilir. Bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile $\mathbb{Q}[x]$ ve $\mathbb{R}[x]$, birimli değişmeli halkalardır. $\mathbb{Q}[x]$ veya $\mathbb{R}[x]$ in tersinir elemanları, sıfır olmayan sabit polinomlardır. Polinomları, en genel biçimiyle, 23, 24 ve 25 inci bölümlerde ele alacağız. □

Uyarı 2. Birimli bir H halkası içinde, $1_H = 0_H$ ise, Teorem $1(i)$ den kolayca görülebileceği üzere, her $x \in H$ için $x = x1_H = x0_H = 0_H$ dır. Dolayısıyla, bu durumda, $H = \{0_H\}$ olur. $\square$