

ALIŞTIRMALAR 15

1. Aşağıdakilerden her birinin $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ nin bir ideali olup olmadığını belirleyiniz.

a. $\{0\} \oplus \mathbb{Z}$

b. $\{(t, t) : t \in \mathbb{Z}\}$

c. $2\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z}$

2. H bir halka ve p verilen bir asal sayı olsun.

$$M_p = \{x \in H : \text{uygun bir } k \geq 0 \text{ için } p^k x = 0\}$$

kümesinin H nin bir ideali olduğunu gösteriniz.

3. H değişmeli halka, $x, y \in H$ ise,

$$A = \{a \in H : \{b \in H : ax = by\} \neq \emptyset\}$$

kümesi H nin bir ideali olur, kanıtlayınız:

4. H bir değişmeli halka ve K onun boş olmayan bir altkümesi olsun. $K_0 = \{a \in H : \text{her } x \in K \text{ için } ax = 0\}$ kümesinin, H nin bir ideali olduğunu gösteriniz. (K_0 a K nin *sıfırlayıcı* ideali denir ve $K_0 = sfr(K)$ yazılır. $x \in H$ ise, $\{x\}$ in sıfırlayıcı ideali $sfr(x)$ ile gösterilir.) $\mathbb{Z}_{12}$ içinde $sfr(3)$ ve $sfr(4)$ ü bulunuz.

5. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye sürekli fonksiyonların oluşturduğu halka H olsun ve

$$A = \{f \in H : f(0) \in 2\mathbb{Z}\}$$

tanımlayalım. A , H nin bir althalkası olduğu halde ideali değildir, kanıtlayınız.

6. H birimli bir halka, A onun bir ideali olsun.

a. $1 \in A$ ise, $A = H$ olduğunu gösteriniz.

b. $H^* \cap A \neq \emptyset$ ise, $A = H$ olduğunu gösteriniz. (Burada, H^* ile H nin tersinir elemanlarının kümesi (grubu) gösterilmektedir.)

7. Bir cismin, $\{0\}$ ve $\langle 1 \rangle$ den başka ideali bulunmadığını kanıtlayınız.

8. Birimli değişmeli bir halkanın $\{0\}$ ve $\langle 1 \rangle$ den başka hiç ideali yoksa, o halkanın bir cisim olduğunu gösteriniz.

9. $\{14, 21\}$ kümesinin $\mathbb{Z}$ içinde ürettiği ideali bulunuz.

10. A ve B bir H halkasının idealleri ise,

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

nin de H nin bir ideali olduğunu gösteriniz. ($A + B$ ye A ve B ideallerinin *toplamı* denir.)

11. A ve B , bir H halkasının idealleri ise,

$$AB = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i b_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in A, b_i \in B, 1 \leq i \leq n \right\}$$

nin de H nin bir ideali olduğunu gösteriniz. (AB ye A ve B ideallerinin *çarpımı* denir.)

12. Bir H halkasının A ve B gibi iki ideali için daima $AB \subseteq A \cap B$ olduğunu kanıtlayınız.

13. H birimli değişmeli halka; A ve B , H nin iki ideali ve $A + B = H$ ise, $A \cap B = AB$ olduğunu kanıtlayınız.

14. H bir değişmeli halka ve A onun bir ideali olsun.

$$\sqrt{A} = \{x \in H : \text{uygun bir } n \in \mathbb{N} \text{ için } x^n \in A\}$$

kümesinin H nin bir ideali olduğunu kanıtlayınız. ($\sqrt{A}$ ya A nın *sıfır*

radikali denir.)

15. $\mathbb{Z}_{24}$ içinde $\sqrt{\langle 0 \rangle}$, $\sqrt{\langle 2 \rangle}$ ve $\sqrt{\langle 8 \rangle}$ i; $\mathbb{Z}_{36}$ içinde $\sqrt{\langle 0 \rangle}$, $\sqrt{\langle 4 \rangle}$ ve $\sqrt{\langle 6 \rangle}$ yı bulunuz.

16. H , birimi olmayan bir değişmeli halka ve $a \in H$ ise, $\langle a \rangle$ yı belirleyiniz.

17. $2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ halkasının işlem tablolarını yapınız. Bu halkanın birim elemanı var mıdır?

18. $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ halkasının işlem tablolarını yapınız. Bu halkanın birim elemanı var mıdır?

19. $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$ in bir cisim olduğunu gösteriniz.

20. H bir halka ve A onun bir ideali olsun. Aşağıdaki koşulların denk olduğunu kanıtlayınız.

a. Her $x, y \in H$ için $xy - yx \in A$ **b.** H/A değişmeli halkadır.

21. H , her ideali tek üreteçli olan bir tamlık bölgesi ise, H nin her A ideali için H/A nın her idealinin de tek üreteçli olduğunu kanıtlayınız.

22. $A = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{2}\}$ kümesinin $\mathbb{Z}[i]$ nin bir maksimal ideali olduğunu gösteriniz. $\mathbb{Z}[i]/A$ nın kaç elemanı vardır?

23. $A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ nin, asal; ancak maksimal olmayan bir idealidir, kanıtlayınız.