

ALIŞTIRMALAR 16

1. Aşağıdaki dönüşümlerden her birinin bir halka homomorfizmi olduğunu gösteriniz; her bir homomorfizmin çekirdeğini ve görüntü kümesini bulunuz ve Teorem 3 ü uygulayınız.

a. $\sigma : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \sigma(P) = P(0).$

b. $\sigma : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_{30} \quad , \quad \sigma(x) = 6x.$

c. $\sigma : \mathbb{Z}_{10} \longrightarrow \mathbb{Z}_{10} \quad , \quad \sigma(x) = 6x.$

d. $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ olmak üzere,

$$\sigma : \mathbb{C} \longrightarrow H \quad , \quad \sigma(a + bi) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

2. Aşağıdaki dönüşümlerden hiçbirinin bir halka homomorfizmi olmadığını kanıtlayınız.

a. $\sigma : \mathbb{R}^{2 \times 2} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \sigma \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = a + d.$

b. $\sigma : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_{10} \quad , \quad \sigma(x) = 5x.$

c. $\sigma : \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_{30} \quad , \quad \sigma(x) = 20x.$

d. $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \sigma(x) = x^2.$

3. $\sigma : H \longrightarrow K$ bir halka homomorfizmi, $\sigma(1_H) \neq 0$, H birimli halka ve K tamlik bölgesi ise, $\sigma(1_H) = 1_K$ olduğunu gösteriniz. K tamlik bölgesi değilse, bu önermenin doğru olmadığını, bir karşı örnekle, gösteriniz.

4. $\mathbb{Z}$ den $\mathbb{Z}$ ye tüm halka homomorfizmlerini bulunuz. $\mathbb{Z}$ nin tüm (halka) otomorfizmlerini bulunuz.

5. $\mathbb{Z}$ den $\mathbb{Z}_6$ ya tüm halka homomorfizmlerini bulunuz.

6. H bir halka, F bir cisim, $\sigma : H \longrightarrow F$ ve $\psi : F \longrightarrow H$ halka

homomorfizmleri olsun. Bu takdirde,

- a. $\ker(\sigma) \neq H$ ise, $\ker(\sigma)$ nın H içinde bir asal ideal olduğunu,
- b. $\ker(\psi) \neq F$ ise, ψ nin bire-bir olduğunu gösteriniz.

7. $\mathbb{Z}_6$ nın tüm halka otomorfizmlerini bulunuz.

8. $2\mathbb{Z}$ ve $3\mathbb{Z}$ halkalarının izomorf olmadığını gösteriniz. $3\mathbb{Z}$ ve $6\mathbb{Z}$ halkaları izomorf mudur?

9. $\mathbb{Q}$ dan $\mathbb{Q}$ ya tüm halka homomorfizmlerini bulunuz.

10. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tüm halka homomorfizmlerini bulunuz (*İpucu:* $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye, görüntü kümesinde sıfırdan farklı sayılar bulunan her homomorfizmin, rasyonel sayıları sabit bıraktığını, pozitif reel sayıları pozitif reel sayılara dönüştürdüğünü ve dolayısıyla sıralamayı koruduğunu; yani $x < y$ ise, x in görüntüsünün y nin görüntüsünden küçük olduğunu gözlemleyerek bu homomorfizmin birim dönüşüm olduğu sonucunu çıkarınız.)

11. Öyle bir H halkası var mıdır ki, $\mathbb{R}$ den H ye, çekirdeği $\mathbb{Z}$ olan bir halka homomorfizmi bulunsun? Neden ?

12. H ve K , birimli, değişmeli halkalar; $\sigma : H \longrightarrow K$ bir örten halka homomorfizmi olsun. Eğer H nin karakteristiği $n > 0$ ise, K nın karakteristiği n yi böler. Kanıtlayınız.

13. Konu içinde kesirler cisminin kuruluşunda ele alınan ikili işlemlerin iyi tanımlı olduklarını gösteriniz ve $Kes(T)$ nin, bu ikili işlemlerle, gerçekten bir cisim olduğunu kanıtlayınız.

14. T bir tamlık bölgesi ve $K = Kes(T)$ onun kesirler cismi ise,

$$\sigma : T \longrightarrow K, \quad \sigma(t) = \frac{t}{1}$$

dönüşümünün bire-bir bir halka homomorfizmi olduğunu gösteriniz.