

CEVAPLAR

ALIŞTIRMALAR 16

1. a. $\sigma(P + Q) = P(0) + Q(0) = \sigma(P) + \sigma(Q)$;

$$\sigma(PQ) = P(0)Q(0) = \sigma(P)\sigma(Q).$$

$$\text{çek}(\sigma) = x\mathbb{R}[x] = \langle x \rangle,$$

$$\text{gör}(\sigma) = \mathbb{R}, \mathbb{R}[x]/\langle x \rangle \cong \mathbb{R}.$$

b. σ iyi tanımlı, homomorfizm.

$$\text{çek}(\sigma) = \{0\}, \text{gör}(\sigma) = \{0, 6, 12, 18, 24\},$$

$$\mathbb{Z}_5/\{0\} \cong \{0, 6, 12, 18, 24\}.$$

c. σ iyi tanımlı, homomorfizm.

$$\text{çek}(\sigma) = \{0, 5\} = \langle 5 \rangle,$$

$$\text{gör}(\sigma) = \{0, 2, 4, 6, 8\},$$

$$\mathbb{Z}_{10}/\langle 5 \rangle \cong \{0, 2, 4, 6, 8\}.$$

$$\text{d. } \sigma((a+bi) + (c+di)) = \sigma((a+c) + (b+d)i) = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$$

$$= \sigma(a+bi) + \sigma(c+di);$$

$$\sigma(a+bi)(c+di) = \sigma((ac-bd) + (ad+bc)i)$$

$$= \begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$$

$$= \sigma(a+bi)\sigma(c+di).$$

$$\text{çek}(\sigma) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \text{gör}(\sigma) = H, \mathbb{C} \cong H.$$

3. $\sigma(1_H) = e \in K \implies e \cdot 1_K = e = \sigma(1_H \cdot 1_H) = \sigma(1_H) \cdot \sigma(1_H) = e \cdot e \implies 1_K = e$. Karşı örnek için $\sigma : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $\sigma(a) = (a, 0)$; $\sigma(1) = (1, 0)$, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ nin birim elemanı değil.

5. $\sigma : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_6$, $\sigma(x) = ax$; $a \in \{0, 1, 3, 4\}$.

7. $Oto(\mathbb{Z}_6) \cong \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_6^*$.

9. $\sigma : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ bir halka homomorfizmi ise, ya $\ker(\sigma) = \{0\}$ ya da $\ker(\sigma) = \mathbb{Q}$ dur. Dolayısıyla, ya her $x \in \mathbb{Q}$ için $\sigma(x) = x$ ya da her $x \in \mathbb{Q}$ için $\sigma(x) = 0$.

11. Hayır, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ nin ideali değil.

13. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{a'}{b'}, \frac{c'}{d'} \in Kes(T)$ için $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}$ ise,

$$ad - bc = a'd' - b'c' = 0$$

olur. Buradan, bir kaç aritmetik işlemle,

$$(ab' + a'b)dd' - (cd' + c'd)bb' = 0, \quad aa'dd' - cc'bb' = 0$$

ve dolayısıyla,

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{c}{d} + \frac{c'}{d'}, \quad \frac{a}{b} \frac{a'}{b'} = \frac{c}{d} \frac{c'}{d'};$$

böylece, toplama ve çarpma işlemlerinin iyi tanımlı olduğu görülür.