

ALIŞTIRMALAR 2

1. $\mathbb{Z}$ üzerinde, her $m, n \in \mathbb{Z}$ için $m * n = m + n + mn$ denkleminin, birleşme özelliğine, değişme özelliğine ve birim elemana sahip bir ikili işlem tanımladığını gösteriniz. Bu ikili işlemin birim elemanını belirleyiniz.

2. $K = \{a, b, c, d, e\}$ üzerinde yandaki tablo ile tanımlanan $*$ işlemini kullanarak, istenen hesapları yapınız, soruları yanıtlayınız.

*	a	b	c	d	e
a	b	c	d	e	a
b	c	a	d	d	b
c	a	b	e	a	c
d	b	a	a	d	b
e	a	b	c	b	e

a. $a * c$, $d * b$ ve $((b * d) * c) * a$ yı hesaplayınız.

b. $(a * b) * c$ ve $a * (b * c)$ yi hesaplayınız. Buradan $*$ işleminin birleşme özelliği hakkında birşey söylenebilir mi?

c. $(a * c) * d$ ve $a * (c * d)$ yi hesaplayınız. Buradan $*$ işleminin birleşme özelliği hakkında birşey söylenebilir mi?

d. $a * b$ ve $b * a$ yı hesaplayınız. Buradan $*$ işleminin değişme özelliği hakkında birşey söylenebilir mi? Neden?

e. $a * c$ ve $c * a$ yı hesaplayınız. Buradan $*$ işleminin değişme özelliği hakkında birşey söylenebilir mi?

f. $a * e$ ve $e * a$ yı hesaplayınız. Buradan $*$ işlemine göre birim eleman hakkında birşey söylenebilir mi? Neden?

3. Yandaki tablonun, $\{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde değişme özelliğine sahip bir ikili işlemin işlem tablosu olması istenmektedir. Tablodaki boşlukları öyle doldurunuz ki bu istek yerine gelsin.

*	a	b	c	d
a	a		c	
b	b	d	a	c
c			b	d
d	d			c

4. Aşağıdaki ikili işlemlerden her birinin birleşme ve değişme özelliğine sahip olup olmadığını belirleyiniz:

- a. $\mathbb{Q}$ üzerinde, $a * b = a + b + \frac{1}{3}ab$ b. $\mathbb{Q}$ üzerinde, $a * b = \frac{a-b}{3}$

5. $x, y, x_1, x_2, \dots, x_n$, üzerinde birleşme ve değişme özelliğine sahip bir çarpma işlemi bulunan bir kümenin elemanları ise, aşağıdakileri kanıtlayınız:

a. $1, 2, \dots, n$ sayılarının herhangi bir sıralanışı $j_1, j_2, \dots, j_n$ ise, $\prod_{i=1}^n x_i = x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_n} = \prod_{i=1}^n x_{j_i}$ dir.

b. Her $m \in \mathbb{N}$ için $(xy)^m = x^m y^m$ dir.

6. $K = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde yandaki tablo ile tanımlanan $*$ işlemini düşününüz.

*	a	b	c	d	e
a	c	a	b	a	a
b	b	c	b	b	b
c	a	b	c	c	c
d	b	a	a	d	e
e	a	b	c	d	e

a. $S = \{a, b\}$ ve $T = \{c, d, e\}$ altkümeleri, K nın bir parçalanışını verir. Bu parçalanışa karşılık gelen β bağıntısı için, $*$ işleminin, K/β üzerinde bir ikili işlem indirgeyip indirgemediğini belirleyiniz.

b. K üzerinde öyle bir β bağıntısı bulunuz ki $*$ işlemi, K/β ya bir ikili işlem indirgesin.

c. K üzerinde öyle bir $*$ ikili işlemi tanımlayınız ki bu işlem, (a) şıkında verilen β bağıntısına göre denklik sınıflarına taşınabilsin.

7. K bir küme; β , K üzerinde bir denklik bağıntısı; $*$, K üzerinde β ya göre denklik sınıflarına taşınabilen bir ikili işlem olsun. $*$ ın K/β üzerine indirgediği ikili işlemi, daha önce olduğu gibi, $\bullet$ ile gösterelim. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız.

a. $*$ ın birleşme özelliği varsa, $\bullet$ nın da birleşme özelliği vardır.

b. $*$ ın değişme özelliği varsa, $\bullet$ nın da değişme özelliği vardır.

c. $e \in K$, $*$ a göre birim eleman ise, $[e]_\beta$ da $\bullet$ a göre birim elemandır.