

## ALIŞTIRMALAR 6

1.  $\mathbb{Z}_6$ ,  $\mathbb{Z}_8$ ,  $\mathbb{Z}_{20}$  ve  $\mathbb{Z}_{36}$  nın tüm üreteçlerini bulunuz.
2.  $\langle a \rangle$ ,  $\langle b \rangle$ ,  $\langle c \rangle$  ve  $\langle d \rangle$  mertebeleri sırasıyla, 6, 8, 20 ve 36 olan devirli gruplar olsun. Bu gruplardan her birinin tüm üreteçlerini bulunuz.
3.  $\mathbb{Z}_{20}$  nin altgruplarından  $\langle 5 \rangle$  ve  $\langle 6 \rangle$  nın tüm elemanlarını listeleyiniz.
4.  $\mathbb{Z}_{20}^*$  in devirli altgruplarından  $\langle 3 \rangle$  ve  $\langle 7 \rangle$  nin tüm elemanlarını listeleyiniz.
5. Devirli olmadığı halde her bir özaltgrubu devirli olan bir grup bulunuz.
6.  $G$  bir grup,  $x \in G$  ve  $|x| = 18$  olduğuna göre,  $|x^2|$ ,  $|x^3|$ ,  $|x^5|$ ,  $|x^6|$ ,  $|x^8|$ ,  $|x^9|$ ,  $|x^{12}|$ ,  $|x^{15}|$  i hesaplayınız.
7.  $\mathbb{Z}_{18}$  in kaç altgrubu vardır? Bu altgruplardan her biri için birer üreteç bulunuz.  $G = \langle x \rangle$  ve  $|x| = 18$  olsun.  $G$  nin kaç altgrubu vardır? Bu altgruplardan her biri için birer üreteç bulunuz.
8.  $\mathbb{Z}_{30}$  un  $\langle 9 \rangle$  alt grubunun tüm üreteçlerini bulunuz.  $G = \langle x \rangle$ ,  $|x| = 30$  olsun.  $\langle x^9 \rangle$  un tüm üreteçlerini listeleyiniz.
9.  $G$ , mertebesi 24 olan bir devirli grup,  $x \in G$ ,  $x^8 \neq e$  ve  $x^{12} \neq e$  ise,  $G = \langle x \rangle$  olduğunu gösteriniz.
10.  $|x| = 30$  olsun.  $\langle x^{25} \rangle \cap \langle x^{26} \rangle$  için bir üreteç bulunuz. Genel olarak,  $\langle x^m \rangle \cap \langle x^n \rangle$  için bir üreteç nedir?
11.  $\mathbb{Z}$  içinde  $\langle m \rangle \cap \langle n \rangle$  için bir üreteç bulunuz.

**12.** Bir devirli grubun birim ve kendisinden başka bir tek altgrubu varsa ve o altgrubun mertebesi 5 ise, grubun mertebesi kaçtır?

**13.** Bir devirli grubun mertebesi sonsuz olan bir elemanı varsa, o devirli grubun, mertebesi sonlu olan kaç elemanı vardır?

**14.**  $\mathbb{Z}_{30}^*$  ın tüm devirli altgruplarını bulunuz.

**15.** Bir  $G$  grubunun her  $a$  elemanı için  $\langle a \rangle \leq M(a)$  olduğunu kanıtlayınız.

**16.**  $G$  bir Abel grubu,  $H = \{x \in G : |x| \mid 18\}$  ise,  $H \leq G$  olduğunu gösteriniz. Bu önermede 18 sayısının önemi var mıdır? Bu önerme, 18 yerine başka sayılar için de geçerli midir? Önermeyi en genel biçimiyle ifade ediniz.

**17.**  $n = 5, 9, 10, 14, 15, 18, 20, 22, 25$  değerlerinden her biri için  $\mathbb{Z}_n^*$  ın devirli olup olmadığını belirleyiniz.  $\mathbb{Z}_n^*$  ın devirli olduğu  $n$  sayılarının asal çarpanlara ayrışımı ile ilgili bir tahminde bulununuz. Tahmininiz  $n = 8$  veya  $n = 16$  için doğru çıktı mı? Eğer zaman varsa, tahmininizi gözden geçiriniz (Bak. Teorem 17.1 ve Teorem 17.2).

**18.**  $p$  ve  $q$  asal sayılar olmak üzere, aşağıdaki gruplardan her birinin altgrup çizelgesini yapınız.

- a.  $\mathbb{Z}_8$       b.  $\mathbb{Z}_{p^n}$       c.  $\mathbb{Z}_{12}$       d.  $\mathbb{Z}_{p^2q}$       e.  $\mathbb{Z}_8^*$       f.  $\mathbb{Z}_{12}^*$

**19.**  $\mathbb{Q}$  toplamsal grubunun devirli olmadığını gösteriniz.

**20.**  $\mathbb{Q}^+$  çarpımsal grubunun devirli olmadığını gösteriniz.

**21.**  $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  çarpımsal grubu içinde  $\langle 2, 3 \rangle$  altgrubunun devirli olmadığını gösteriniz.

**22.**  $\mathbb{Q}^*$  ın tüm asal sayılardan oluşan küme tarafından üretildiğini gösteriniz.

**23.**  $p$  bir asal sayı olsun. Eğer bir  $G$  grubu içinde mertebesi  $p$  olan elemanların sayısı  $p - 1$  den fazla ise,  $G$  devirli olamaz, kanıtlayınız.

**24.**  $G$  bir grup;  $x, y \in G$ ,  $|x| = m$ ,  $|y| = n$ ,  $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$  ve  $xy = yx$  ise,  $G$  içinde mertebesi  $m$  ve  $n$  nin en küçük ortak katı olan bir eleman bulunduğunu kanıtlayınız.  $xy = yx$  koşulu kaldırılırsa, bu önermenin doğru olmadığını bir örnekle kanıtlayınız.

**25.** Sayılar teorisinde Bertrand Postülatı;  $k \in \mathbb{Z}, k > 1$  ise,  $k$  ile  $2k$  arasında en az bir asal sayı bulunduğunu ifade eder. Bu postülatı kullanarak,  $n > 6$  ise,  $\mathbb{Z}_n$  nin en az 3 üretici bulunduğunu kanıtlayınız.

**26.**  $G$  bir grup;  $x, y \in G$ ,  $|x| = 10$ ,  $|y| = 21$  ise,  $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$  olduğunu gösteriniz.

**27.** Bir  $G$  grubunun mertebesi  $n$  olan bir  $x$  elemanı veriliyor.  $r$  ve  $s$  üzerinde,  $\langle x^r \rangle \subseteq \langle x^s \rangle$  olması için gerekli ve yeterli koşul(lar) bulunuz.

**28.** Bir  $G$  grubunun mertebesi  $n$  olan bir  $x$  elemanı ile  $r$  ve  $s$  doğal sayıları veriliyor.  $\langle x^r \rangle = \langle x^s \rangle \iff (r, n) = (s, n)$  olduğunu kanıtlayınız.

**29.**  $H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$  nin  $GL(2, \mathbb{R})$  içinde bir devirli grup olduğunu kanıtlayınız.

**30.**  $p$  bir asal sayı,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ ,  $H \leq \mathbb{Z}_{p^n}$ ,  $K \leq \mathbb{Z}_{p^n}$  ise, ya  $H \leq K$  ya da  $K \leq H$  olduğunu gösteriniz.