

CEVAPLAR

ALIŞTIRMALAR 6

1. $\mathbb{Z}_6$ nın üreteçleri: 1, 5. $\mathbb{Z}_8$ in üreteçleri: 1, 3, 5, 7. $\mathbb{Z}_{20}$ nin üreteçleri: 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19. $\mathbb{Z}_{36}$ nın üreteçleri: 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35.

3. $\langle 5 \rangle = \{0, 5, 10, 15\}$, $\langle 6 \rangle = \{0, 6, 12, 18, 4, 10, 16, 2, 8, 14\}$.

5. $\mathcal{S}_3$.

7. $\mathbb{Z}_{18}$ in 18 in bölenleri kadar altgrubu vardır: 6 tane. Mertebesi 1 olan $\langle 0 \rangle$, mertebesi 2 olan $\langle 9 \rangle$, mertebesi 3 olan $\langle 6 \rangle$, mertebesi 6 olan $\langle 3 \rangle$, mertebesi 9 olan $\langle 2 \rangle$, mertebesi 18 olan $\langle 1 \rangle$. $G = \langle x \rangle$ ve $|x| = 18$ ise, G nin de 6 altgrubu vardır. Mertebesi 1 olan $\langle x^0 \rangle$, mertebesi 2 olan $\langle x^9 \rangle$, mertebesi 3 olan $\langle x^6 \rangle$, mertebesi 6 olan $\langle x^3 \rangle$, mertebesi 9 olan $\langle x^2 \rangle$, mertebesi 18 olan $\langle x \rangle$,

9. $|x| \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$. $x^8 \neq e$ ve $x^{12} \neq e$ olduğuna göre, $|x| = 24$, yani $G = \langle x \rangle$ olmalıdır.

11. $\mathbb{Z}$ içinde $\langle m \rangle \cap \langle n \rangle = \langle okck(m, n) \rangle$.

13. 1 elemanı vardır: e .

15. Her $k \in \mathbb{Z}$ için $a^k \cdot a = a^{k+1} = a \cdot a^k$, yani $a^k \in M(a)$.

17. $n = 5, 9, 10, 14, 18, 22, 25$ değerleri için $\mathbb{Z}_n^*$ devirlidir: $\mathbb{Z}_5^* = \langle 2 \rangle$, $\mathbb{Z}_9^* = \langle 2 \rangle$, $\mathbb{Z}_{10}^* = \langle 3 \rangle$, $\mathbb{Z}_{14}^* = \langle 3 \rangle$, $\mathbb{Z}_{18}^* = \langle 5 \rangle$, $\mathbb{Z}_{22}^* = \langle 7 \rangle$,

$\mathbb{Z}_{25}^* = \langle 2 \rangle$. $\mathbb{Z}_{15}^*$ ve $\mathbb{Z}_{20}^*$ devirli değil. 2 den büyük bir asal sayının herhangi bir kuvveti veya böyle bir kuvvetin 2 katı olarak yazılabilen n sayıları için $\mathbb{Z}_n^*$ devirlidir.

19. $\mathbb{Q} = \langle \frac{r}{s} \rangle$, $r, s \in \mathbb{Z}$, $(r, s) = 1$, $s \neq 0$ olsun. s nin asal çarpanı olmayan bir p asal sayısı alalım. $\frac{1}{p} = k \cdot \frac{r}{s}$, $k \in \mathbb{Z}$ olması gerekir. Bu durumda, $s = p \cdot k \cdot r \implies p \mid s$; çelişki.

21. $\langle 2, 3 \rangle = \{2^r 3^s : r, s \in \mathbb{Z}\}$ devirli, $\langle 2, 3 \rangle = \langle 2^{r_0} 3^{s_0} \rangle$ olsun. Bu takdirde, $2 = (2^{r_0} 3^{s_0})^m$, $3 = (2^{r_0} 3^{s_0})^n$; $m, n \in \mathbb{Z}$ olur. Bu durumda, $r_0 m = 1$, $s_0 m = 0$; $r_0 n = 0$, $s_0 n = 1$, ve buradan da $s_0 = r_0 = 0$, $2 = 3 = 1$ çelişkisi elde edilir.

23. p asal, G devirli olsun. G içinde mertebesi p olan eleman varsa, G sonlu olmak zorundadır. Bu takdirde, G nin, mertebesi p olan sadece bir altgrubu ve dolayısıyla, tam $\varphi(p) = p - 1$ tane mertebesi p olan elemanı vardır.

25. n nin en büyük asal çarpanı q olsun. Eğer $q = 2$ ise, $n = 2^r$, $r \geq 3$ ve $\mathbb{Z}_n$ nin üreteç sayısı $\varphi(2^r) = 2^{r-1} > 3$ olur. Eğer $q > 2$ ise, $2q \leq n - 1$ olur ve Bertrand Postülatı'na göre q ile $2q$ arasında en az bir p asal sayısı bulunur. Bu durumda, $1 < p < n - 1$ olup bu üç sayıdan her biri $\mathbb{Z}_n$ nin bir üretecidir.

27. $\langle x^r \rangle \subseteq \langle x^s \rangle \iff (n, s) \mid (n, r)$ olduğunu kanıtlayalım.

$$\implies: x^r \in \langle x^s \rangle \implies |x^r| \mid |x^s| \implies \frac{n}{(n, r)} \mid \frac{n}{(n, s)} \implies (n, s) \mid (n, r).$$

$$\impliedby: (n, s) \mid (n, r) \implies \frac{n}{(n, r)} \mid \frac{n}{(n, s)} \implies \langle x^r \rangle \subseteq \langle x^s \rangle.$$

29. $H = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$