Soyut Cebire Giriş

FİNAL SINAVI SORULARININ CEVAPLARI

1. $G=<a>\{e,a,\ldots,a^{m-1}\}$ ise, her n doğal sayısı için $G^n=<a^n>$dir. Dolayısıyla, $\left|G/G^n\right|=\frac{|G|}{|G^n|}=\frac{|a|}{|a^n|}=\frac{m}{\left(\frac{m}{obeb(m,n)}\right)}=obeb(m,n).$

2. Her $a\in Z_{10}$ için $\sigma_a(1)=a$ ve dolayısıyla, $\sigma_a(x)=ax,\ \ x\in Z_{30}$, Z_{30} den Z_{10} a bir grup homomorfizmi tanımlar. Bu 10 homomorfizmden 4 ü örtendir; çünkü, σ_a nın örten olması için gerek ve yeter koşul, $a\in Z_{10}^*$ olmasıdır.

3. 288=2^5 3^2 olduğundan mertebesi 288 olan ve herhangi ikisi izomorf olmayan tam (5 in parçalanış sayısı)×(2 nin parçalanış sayısı)= 7×2=14 Abel grubu vardır.

4. $0=a0a\in A$. $axa,\ aya\in A$ ise, $axa-aya=a(x-y)a\in A$ ve $(axa)\times(aya)=axa^2ya=a(xy)a\in A.$

5. $F=\left\{\begin{bmatrix}x & y\\ y & x+y\end{bmatrix}: x,y\in Z_2\right\}\left\{\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\right\}$ in $Z_2^{2\times 2}$ nin birimli değişmeli bir althalkası olduğu açıktır (birim eleman $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$). $\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$ ile $\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$ matrisleri birbirinin tersi olduğundan, F bir cisimdir.

6. **a)** Her $a\in A$ ve $b\in B$ için $a\in A$ ve $b\in H$ olduğundan $ab\in A$, $a\in H$ ve $b\in B$ olduğundan $ab\in B$; böylece, $ab\in A\cap B$ dir. Dolayısıyla, $AB\subseteq A\cap B$ dir

.

b) $AB\subseteq A\cap B$ olduğunu önceki şıkta gösterdik. $A+B=H$ ise, $1=a+b$ olacak biçimde $a\in A, b\in B$ bulunur. Bu durumda, her $x\in A\cap B$ için $x=xa+xb\in AB$ olacağınadan $A\cap B\subseteq AB$; böylece, $AB=A\cap B$ dir.

7. Her $x\in 2Z$ için $[x]=x+6Z$ olmak üzere $2Z/6Z=\{[0],[2],[4]\}$ olup işlem tabloları şöyledir:

+	[0]	[2]	[4]
[0]	[0]	[2]	[4]
[2]	[2]	[4]	[0]
[4]	[4]	[0]	[2]

.	[0]	[2]	[4]
[0]	[0]	[2]	[4]
[2]	[2]	[4]	[0]
[4]	[4]	[0]	[2]

8. $\sigma_a : Z \to Z_6$, $\sigma_a(x) = ax$, $a \in \{0,1,5\}$; 3 homomorfizm($a \in Z_6$ ve $a^2 = 1$ olmalı).

9. (*mod* 4) indirgeme homomorfizmi $\sigma : Z \to Z_4$ örten halka homomorfizmi; $\{0\}$, Z nin bir asal ideali; $\sigma(\{0\}) = \{0\}$, Z_4 ünasal ideali değildir.

10. $Oto(Z_{50}) \cong Z_{50}^{*} \cong Z_{20}$ devirlidir.