Bölüm 19

NİCELİK SAYILARI

19.1 GİRİŞ

Günlük yaşantımızda çok sık kullandığımız iki türlü sayı vardır. Birincisi, bir kümenin niceliğini (öğelerinin sayısını) belirten sayılardır. Örneğin,

1. "Beş Öğrenci"
2. "Beş ev"
3. "Beş otobüs"

ifadelerinden anladığımız şey, bu kümelerin hangi tür öğelerden oluştuğundan çok, bu kümelerin öğelerinin ne kadar çok ya da ne kadar az olduğudur; yani bu kümelerin niceliğidir. Öte yandan,

1. "Beşinci öğrenci"
2. "Beşinci ev"
3. "Beşinci otobüs"

deyimlerinden anladığımız şey, bir kümenin niceliği ya da öğelerinin türü değil, üzerinde bir sıralama olduğunu sezdiğimiz bir kümeye ait bir öğenin, söz konusu sıralamaya göre yerinin neresi olduğudur.

Birinci tür sayılara *nicelik sayıları*, ikinci tür sayılara da *sıra sayıları* diyeceğiz. Bu bölümde nicelik sayılarını inceleyeceğiz. Sıra sayılarını sonraki bölümde ele alacağız.

19.2 NİCELİK SAYILARI AKSİYOMU

Eşgüçlülük bağıntısının herhangi bir kümeler ailesi üzerinde bir denklik bağıntısı olduğunu biliyoruz. Amacımız kümelerin niceliklerini belirlemek olduğuna göre, eşgüçlü kümelerin niceliklerinin eşit olduğunu sezebiliyoruz. Eğer *"bütün* *kümelerin kümesi"* nden sözetmek olanağı olsaydı, bu kümeyi eşgüçlülük bağıntısı ile denklik sınıflarına ayırır, herbir denklik sınıfından birer temsilci seçer ve ona, o denklik sınıfının nicelik sayısı diyebilirdik. Ancak, ileride göreceğimiz gibi *"bütün kümelerin kümesi"* nden sözedemiyoruz. Bu güçlüğü ancak, adına *nicelik sayılarının varlığı aksiyomu*, diyeceğimiz, aşağıdaki aksiyomu kabul ederek aşabileceğiz.

19.2.1 Nicelik Sayılarının Varlığı

Aksiyom 19.2.1. *Aşağıdaki özeliklere sahip bir $\mathfrak{N}$ ailesi vardır. Bu aileye* nicelik sayıları *diyeceğiz:*

$\mathfrak{N}1$ Her A kümesi için, A kümesinin nicelik sayısı adını vereceğimiz ve A kümesine eşgüçlü olan bir $\mathfrak{a}$ kümesi vardır.

$\mathfrak{N}2$ A kümesinin nicelik sayısı $\mathfrak{a}$, B kümesinin nicelik sayısı $\mathfrak{b}$ ise

$$A \approx B \Leftrightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b} \tag{19.1}$$

Bu A kümesinin nicelik sayısı $\mathfrak{a}$, $\bar{\bar{A}}$, $\natural(A)$, $n(A)$ simgelerinden birisiyle gösterilir.

19.3 NİCELİK SAYILARININ ARİTMETİĞİ

19.3.1 Nicelik Sayılarının Toplamı

3.1. TOPLAMA: a, b iki nicelik sayısı olsun. $\natural A = a$, $\natural B = b$ olacak şekilde birbirlerinden ayrık A ve B kümelerini düşünelim. a ile b nicelik sayılarının $a + b$ şeklinde göstereceğimiz toplamını $A \cup B$ kümesinin nicelik sayısı olarak; yani

$$a + b = \natural(A \cup B) \tag{19.2}$$

olarak tanımlayacağız.

19.3.2 Toplamanın İyi Tanımlılığı

Nicelik sayılarının toplama işlemi iyi tanımlıdır. Burada iyi tanımlılık şu anlama gelir: $\natural A = a = \natural A_1$, $\natural B = b = \natural B_1$ olacak şekilde A, A_1, B, B_1 kümeleri varsa

$$\natural(A \cup B) = a + b = \natural(A_1 \cup B_1) \tag{19.3}$$

olur. Bu özelik Sonuç 18.3.1 tan çıkar.

Önerme 19.3.1. *a, b nicelik sayıları için, yukarıdaki özeliklere sahip A ve B kümeleri vardır.*

İSPAT: Koşulu sağlayan kümeleri oluşturmak ispat için yeterlidir. Örneğin, verilen a, b nicelik sayılarına karşılık

$$\begin{aligned} a &\approx a \times \{0\} = A \\ b &\approx b \times \{1\} = B \end{aligned}$$

kümelerini tanımlayalım. A kümesinin öğeleri $(x, 0)$, B kümesinin öğeleri $(y, 1)$ sıralı çiftleri şeklinde olacağına göre, $x = y$ olsa bile, bu sıralı çiftler daima birbirlerinden farklı olacaktır. Dolayısıyla, A ile B kümeleri ayrıktır.

Önerme 19.3.2. *Nicelik sayıları kümesi üzerinde toplama işleminin birleşme (asosyatiflik) özeliği vardır; yani a, b, d herhangi üç nicelik sayısı ise*

$$(a + b) + d = a + (b + d) \tag{19.4}$$

olur

İSPAT: $a = \natural A$, $b = \natural B$, $d = \natural D$ olacak gekilde birbirlerinden ayrık A, B, D kümelerini düğünelim.

$$(A \cup B) \cup D = A \cup (B \cup D) \tag{19.5}$$

olduğunu biliyoruz. Eşit kümeler, özel olarak, eşgüçlü olacaklarından, $\mathfrak{N}2$. aksiyomu gereğince, (19.5) bağıntısının iki yanının nicelik sayıları eşit olacaklardır; yani

$$\natural[(A \cup B) \cup D] = \natural[A \cup (B \cup D)] \tag{19.6}$$

dir. Bunun her iki yanına (19.2) toplama tanımını uygularsak

$$\begin{aligned} \natural(A \cup B) + \natural D &= \natural A + \natural(B \cup D)] \\ \natural A + \natural B + \natural D &= \natural A + \natural B \natural D \\ [\natural A + \natural B] + \natural D &= \natural A + [\natural B \natural D] \\ (a + b) + d &= a + (b + d) \end{aligned}$$

çıkar.

Önerme 19.3.3. *Nicelik sayıları toplama işlemine göre yer değiştirme (komutatif) özeliğine sahiptir; yani a ile b herhangi iki nicelik sayısı ise*

$$a + b = b + a \tag{19.7}$$

dır.

İSPAT: Bunu görmek için, önceki önermeye benzer düşünüşle,

$$A \cup B = B \cup A$$

olduğunu anımsamak yetecektir.

19.3.3 Nicelik Sayılarının Çarpımı

Tanım 19.3.1. a ile b herhangi iki nicelik sayısı olsun, $a = \natural A$, $b = \natural B$ olacak şekilde A, B kümelerini seçelim, a ile b nin ab şeklinde göstereceğimiz çarpımını $A \times B$ kümesinin nicelik sayısı olarak; yani

$$ab = \natural(A \times B) \tag{19.8}$$

olarak tanımlıyoruz.

19.3.4 Çarpmanın İyi Tanımlılığı

Önerme 19.3.4. *Nicelik sayılarının çarpma işlemi iyi-tanımlıdır.*

İSPAT: Önerme 18.3.2 den çıkar.

Önerme 19.3.5. *a, b, d nicelik sayısı için aşağıdaki özelikler sağlanır:*

(i) $ab = ba$ (yer değişebilir)

(ii) $a(bd) = (ab)d$ (birleşebilir)

(iii) $a(b + d) = ab + ad$ (dağılabilir)

İSPAT: $a = \natural A$, $b = \natural B$, $d = \natural D$ olacak şekilde A, B, D kümelerini seçelim. (iii) için $B \cap D = \emptyset$ varsayacağız.) Aşağıdaki bağıntıları göstermek yeterlidir:

(i) $A \times B \approx B \times A$

(ii) $A \times (B \times D) \approx (A \times B) \times D$

(iii) $A \times (B \cup D) = (A \times B) \cup (A \times D)$

Bunların ilk ikisi, sırasıyla,

$$A \times B \to B \times A : (x, y) \longmapsto (y, x) \tag{19.9}$$

$$A \times (B \times D) \to (A \times B) \times D : (x, (y, z)) \longmapsto ((x, y), z) \tag{19.10}$$

fonksiyonlarından çıkar. Gerçekten bunların bbö oldukları kolayca gösterilir.

19.3.5 Nicelik Sayılarında Üs Alma

a, b herhangi iki nicelik sayısı olsun, $a = \natural A$, $b = \natural B$ olacak şekilde A, B kümelerini seçelim, a ile b nin a^b simgesiyle göstereceğimiz ***a üssü b*** sayısını, A^B kümesinin nicelik sayısı olarak; yani

$$a^b = \natural(A^B) \tag{19.11}$$

olarak tanımlıyoruz.

19.3.6 Üs Almanın İyi Tanımlılığı

Önerme 19.3.6. *Nicelik sayıları üzerinde üs alma işlemi iyi tanımlıdır.*

İSPAT: Önerme 18.3.3 den çıkar.

Önerme 19.3.7. *a, b, d herhangi üç nicelik sayısı ise, aşağıdaki özelikler sağlanır.*

(i) $a^b a^d = a^{b+d}$

(ii) $a^d b^d = (ab)^d$

(iii) $(a^b)^d = a^{bd}$

İSPAT: $a = \natural A$, $b = \natural B$, $d = \natural D$ olacak şekilde A, B, D kümelerini seçelim. (i) için $B \cap D = \emptyset$ varsayacağız.) Aşağıdaki bağıntıları göstermek yeterlidir:

1. $A^B \times A^D \approx A^{B \cup D}$
2. $A^D \times B^D \approx (A \times B)^D$
3. $(A^B)^D \approx A^{B \times D}$

Bu eşgüçlülüklerin varlığını (18.24) , (18.27), (18.28) bağıntılarından biliyoruz.

19.4 ÖNEMLİ NİCELİK SAYILARI

Bir kümenin niceliğini belirlemek için, ya o kümeyi sayarız ya da o kümeyi niceliğini bildiğimiz bir kümeyle karşılaştırırız. Önceden gördüğümüz gibi, her kümeyi sayma olanağı yoktur. Dolayısıyla, ikinci yöntemi genel kural olarak kullanacağız. Bunun için, öncelikle, nicelikleri bizce belli olan bazı belirtgen (karakteristik) kümeleri tanıyacağız.

19.4.1 Doğal sayılar

Belirtgen kümelerden en çok kullandıklarımız, *sonlu kümelerin nicelik sayıları* olarak tanımladığımız doğal sayılardır. 15. Bölümde doğal sayıları (15.1) ya da buna denk olarak (15.3) kümeleri diye tanımlamıştık. Şimdi özel olarak, herbir doğal sayının, $\mathfrak{N}1.$ ve $\mathfrak{N}2.$ aksiyomları gereğince, varlığını kabul ettiğimiz nicelik sayısını kendisi imiş gibi düşünelim. Yani, her $n \in \omega$ için

$$\natural(n) = \{0, 1, 2, 3, ..., n-1\} = n \tag{19.12}$$

diyelim. Eşgüçlülüğün bir denklik bağıntısı olduğu gözönüne alınırsa, bu kabulümüzün bir sakınca yaratmayacağı anlaşılır. Böylece, herhangi bir doğal sayıya eşgüçlü olan sonlu bir kümenin nicelik sayısı, o doğal sayının kendisi olacaktır. Burada şöyle bir tanım yapabiliriz:

> Doğal sayılar, sonlu kümelerin nicelik sayılardır.

Dolayısıyla, bunlara *sonlu nicelik sayıları* da denilir. Sonlu olmayan nicelik sayılarına da *sonsuz nicelik sayıları* diyeceğiz. Doğal sayılar kümesini ω ile göstermiştik. Kümelerle ilgili işlemlerde yine bu gösterimi koruyacağız. Ancak, sayısal özeliklerle ilgileniyorsak, bu ayrımı belirtmek amacıyla ω yerine $\mathbb{N}$ gösterimini kullanacağız.

19.4.2 Alef Sıfır

Sonlu nicelik sayılardan sonra karşılaştığımız önemli bir nicelik sayısı, ω doğal sayılar kümesinin $\aleph_0$ (İbranice'nin ilk harfidir, *alef* diye okunur) simgesiyle gösterilen nicelik sayısıdır; yani

$$\aleph_0 = \natural(\omega) = \natural(\mathbb{N}) \tag{19.13}$$

dir. Sayılabilir sonsuz bütün kümeler ω doğal sayılar kümesine eşgüçlü olduğundan, $\mathfrak{N}2$. aksiyomu gereğince, sayılabilir sonsuz bütün kümelerin nicelik sayıları $\aleph_0$ dır.

19.4.3 Alef Bir (Sürey)

SÜREY (CONTINUUM)

Tanım 19.4.1. Sayılabilir sonsuz kümelerden sonra sayılamaz sonsuz bir küme olarak $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesini almıştık. Bu kümenin nicelik sayısını c ile ya da $\aleph_1$ ile göstereceğiz; yani

$$\aleph_1 = c = \natural(\mathbb{R}) \tag{19.14}$$

dir. Buna sürey (continuum) denilir.

$\mathfrak{N}2$. aksiyomu gereğince $\mathbb{R}$ ye eşgüçlü olan bütün sonsuz kümelerin nicelik sayısı c dir.

19.5 NİCELİK SAYILARININ SIRALANMASI

Tanım 19.5.1. a ile b herhangi iki nicelik sayısı olsun, $a = \natural A$ ve $b = \natural B$ olacak şekilde A ve B kümelerini alalım. Bu durumda a ile b arasında

$$\begin{aligned} a \preccurlyeq b &\Leftrightarrow A \preccurlyeq B \\ a \prec b &\Leftrightarrow A \prec B \end{aligned} \tag{19.15}$$

bağıntıları tanımlanıyor.

Önerme 19.5.1. *Bir nicelik sayıları kümesi üzerinde (19.15) ile tanımlanan $\preccurlyeq$ bağıntısı bir iyi sıralama bağıntısıdır.*

İSPAT: $\mathcal{N}$ nicelik sayılarından oluşan herhangi bir küme olsun.

$$\mathscr{A} = \{A \mid a = \bar{\bar{A}},\ a \in \mathcal{N}\}$$

kümeler ailesini düşünelim. `Teorem` 17.1.3 gereğince $(\mathscr{A}, \preccurlyeq)$ *iyi sıralanmış* bir sistemdir. Öte yandan

$$f : \mathscr{A} \to \mathcal{N}$$
$$f : A \longmapsto \bar{\bar{A}}$$

dönüşümü bir eşyapı dönüşümüdür. öyleyse, $(\mathcal{N}, \preccurlyeq)$ de iyi sıralanmış bir sistem olacaktır.

Önerme 19.5.2. *a ile b iki nicelik sayısı olsun, $a \leq b$ olması için gerekli ve yeterli koşul $b = a + d$ olacak şekilde bir d nicelik sayısının var olmasıdır.*

İSPAT: $a \leq b$ olsun. $a = \natural A$ ve $b = \natural B$ olacak şekilde birbirlerinden ayrık iki A, B kümesi düşünelim. Varsayımımız gereğince, A dan B ye bbi olan bir f fonksiyonu vardır ve $A \approx f(A)$, $a = \natural f(A)$ olur. $D = B - f(A)$ ve $d = \natural D$ diyelim, $b = a + d$ olacağı apaçıktır.

Tersine olarak $b = a + d$ olacak şekilde bir d nicelik sayısı var olsun.

$$a = \natural A,\ b = \natural B,\ d = \natural D,\ A \cap D = \emptyset$$

olacak şekilde A, B, D kümelerini seçelim. Varsayımımız gereğince bbö bir

$$g : A \cup D \to B$$

fonksiyonu vardır. Şu halde g nin A ya kısıtlaması olan $g_{|A}$, A dan B ye bire-bir-içine (bbi) bir fonksiyondur, ki bu

$$A \approx g(A) \subset B$$

olması demektir. Buradan

$$\natural A \leq \natural B$$
$$a \leq b$$

çıkar.

Önerme 19.5.3. *a, b, d, e nicelik sayıları olsunlar. Eğer $a \leq d$ ve $b \leq e$ ise aşağıdaki bağıntılar sağlanır:*

(i) $a + b \leq d + e$

(ii) $ab \leq de$

(iii) $a^b \leq d^e$

İSPAT: Önceki önerme gereğince $d = a + r$ ve $e = b + s$ olacak şekilde r ve s nicelik sayıları vardır.

(i)

$$d + e = a + r + b + s = (a + b) + (r + s)$$

yazılabilir, ki buradan, önceki önerme gereğince (i) çıkar.

(ii)

$$\begin{aligned} de &= (a + r)(b + s) = ab + as + rb + rs \\ &= ab + (as + rb + rs) \end{aligned}$$

den istenen çıkar.

(iii) Önce r herhangi bir nicelik sayısı olmak üzere

$$a^b \leq (a + b)^b \tag{19.16}$$

olduğunu gösterelim.

$a = \natural A$, $b = \natural B$, $d = \natural D$ ve $r = \natural R$ ise A^B den $(A \cup R)^B$ ye bire-bir-içine bir fonksiyon olduğunu göstereceğiz. Gerçekten her $f : B \to A$ fonksiyonunu aynı zamanda bir $f : B \to A \cup R$ fonksiyonu olarak düşünebiliriz. O haide bir

$$\sigma : A^B \to (A \cup R)^B$$

fonksiyonunu

$$\forall f \in A^B \quad \text{için} \quad \sigma(f) = f$$

diye tanımlayabiliriz. σ nın bbi olduğu apaçıktır. O halde (19.16) eşitsizliği vardır. 5,2. Önerme gereğince bu bağıntıyı

$$a^b \leq d^b$$

şeklinde yazabiliriz. Oysa (ii) den

$$a^b = a^b.1 \leq d^b d^s = d^{b+s} = d^e$$

yazılabilir, ki bu (iii) bağıntısının varlığını gösterir.

19.6 SONSUZ TOPLAMLAR VE SONSUZ ÇARPIMLAR

İki kümenin bileşiminden hareketle, sonlu sayıdaki kümelerin bileşimini ve sonra da keyfî çokluktaki bir kümeler ailesinin bileşimini daha önce tanımladık. Tamamen buna benzer olarak, iki kümenin kartezyen çarpımını, sonlu sayıdaki kümelerin kartezyen çarpımını ve en sonunda da keyfî çokluktaki bir kümeler ailesinin kartezyen çarpımını tanımladık. Şimdi bu iki kavrama dayanarak, sonlu ya da sonsuz sayıda nicelik sayılarının toplamını ve çarpımını tanımlayacağız.

Tanım 19.6.1. Herhangi bir $\{a_i \,|\, i \in I\}$ nicelik sayıları kümesi verilsin. Bu sayıların $\sum_{i \in I} a_i$ ile göstereceğimiz toplamı, her $i \in I$ için $a_i = \natural A_i$ olmak üzere kurulacak ayrık bir $\{A_i \,|\, i \in I\}$ kümeler ailesinin bileşiminin nicelik sayısı olarak tanımlanır; yani $i \neq j$ ve $i, j \in I$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ olmak üzere

$$\sum_{i \in I} a_i = \natural\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \tag{19.17}$$

dir.

Tanım 19.6.2. Herhangi bir $\{a_i \,|\, i \in I\}$ nicelik sayıları kümesi verilsin. Bu sayıların $\Pi_{i \in I} a_i$ ile göstereceğimiz çarpımı, her $i \in I$ için $a_i = \natural A_i$ olmak üzere kurulacak $\{A_i \,|\, i \in I\}$ kümeler ailesinin kartezyen çarpımının nicelik sayısı olarak tanımlanır; yani

$$\prod_{i \in I} a_i = \natural\left(\prod_{i \in I} A_i\right) \tag{19.18}$$

dir.

Şimdi sonsuz toplam ve sonsuz çarpım ile ilgili başlıca özelikleri çıkaralım, m ile n iki doğal sayı ise mn çarpımının m kez n nin toplamı ya da n kez m nin toplamı olduğunu biliyoruz. Benzer olarak, m^n üssü, n kez m nin kendisiyle çarpımı olarak tanımlanır. Şimdi bu özeliklerin sonsuz nicelik sayıları için de varlığını göstereceğiz.

Önerme 19.6.1. *a ile b herhangi iki nicelik sayısı olsun, $b = \natural B$ olacak şekilde bir B kümesi seçelim. Eğer her $\beta \in B$ için $a = a_\beta$ ise aşağıdaki eşitlikler vardır:*

(i) $ab = \sum_{b \in B} a_\beta$

(ii) $a^b = \prod_{\beta \in B} a_\beta$

İSPAT:
(i) Her $\beta \in B$ için $a = a_\beta = \natural A_\beta$ olacak şekilde ayrık bir $\{A_\beta \,|\, \beta \in B\}$ kümeler ailesi kuralım ve $a = \natural A$ olacak gekilde bir A kümesi seçelim. Buna göre, her $\beta \in B$ için $A \approx A_\beta$ olacağından her bir öğesi A dan A_β ya bbö birer fonksiyon olan bir $\{f_\beta \,|\, \beta \in B\}$ fonksiyonlar kümesi vardır. Şimdi bir

$$f : A \times B \to \bigcup_{\beta \in B} A_\beta$$

fonksiyonunu

$$f(x, \beta) = f_\beta(x)$$

diye tanımlayalım, Buradan

$$A \times B \approx \bigcup_{\beta \in B} A_\beta$$
$$ab = \sum_{\beta \in B} a_\beta$$

çıkar.

(ii) Yine $a = \natural A$ olacak şekilde bir A kümesi seçelim, ama yukarıdaki ayrık aile yerine, her $\beta \in B$ için $A = A_\beta$ olmak üzere $\{A_\beta \,|\, \beta \in B\}$ ailesini kuralım. Eğer

$$A^B \approx \prod_{\beta \in B} A_\beta$$

olduğunu gösterebilirsek istenen şey çıkacaktır. Oysa böyle olduğu apaçıktır, çünkü her iki yan B den A ya olan bütün fonksiyonların kümesidir.

19.7 ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER

Örnek 19.7.1. a ile b herhangi iki nicelik sayısı olsun ve $a = \natural A$ ve $b = \natural B$ olacak şekilde A ile B kümeleri verilsin. Bu durumda

$$a + b = \natural(A \cup B) + \natural(A \cap B)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Aşağıdaki eşitlikler ard arda bir birini gerektirir:

$$\begin{aligned} B &= (B - A) \cup (A \cap B) \\ b &== \natural(B_A) + \natural(A \cap B) \\ a + b &== \natural A + \natural(B_A) + \natural(A \cap B) \\ &= \natural(A \cup B) + \natural(A \cap B) \end{aligned}$$

$\boxdot$

Örnek 19.7.2. a ve $\{b_i \,|\, i \in I\}$ nicelik sayıları iseler

$$a\left(\sum_{i \in I} b_i\right) = \sum_{i \in I} ab_i$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$a = \natural A$ ve $b_i = \natural B_i$, $(i \in I)$ olacak şekilde A ve $(B_i \,|\, i \in I\}$ kümelerini seçelim.

$$A \times \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I}(A \times B_i) \tag{19.19}$$

olduğunu biliyoruz, iki yanın nicelik sayısı alınırsa istenen eşitlik çıkar.

Örnek 19.7.3. Her $i \in I$ için $a_i \leq b_i$ olacak şekilde $\{a_i \,|\, i \in I\}$ ve $\{b_i \,|\, i \in I\}$ nicelik sayıları kümeleri verilmişse

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i \tag{19.20}$$

$$\prod_{i \in I} a_i \leq \prod_{i \in I} b_i \tag{19.21}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

(i) Her $i \in I$ için $a_i = \natural A_i$ ve $b_i = \natural B_i$ olacak şekilde ayrık $\{A_i \,|\, i \in I\}$ ve $\{B_i \,|\, i \in I\}$ ailelerini düşünelim. Her $i \in I$ için $a_i < b_i$ olduğuna göre bir $f_i : A_i \to B_i$ bbi fonksiyonu vardır. Şimdi bir

$$f = \uplus_{i \in I} f_i : \bigcup_{i \in I} A_i \to \bigcup_{i \in I} B_i$$
$$x \in A_i \Rightarrow f(x) = f_i(x)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyonun bbi olduğunu görmek kolaydır.

(ii) Yukarıdaki tanımlar altında bir

$$\prod_{i \in I} A_i \to \prod_{i \in I} B_i \tag{19.22}$$

fonksiyonunu şöyle tanımlayalım: $x = (x_i) \in \Pi A_i$ ve $y = (y_i) \in \Pi B_i$ olmak üzere

$$g(x) = y \Leftrightarrow (\forall i(i \in I) f_i(x_i) = y_i$$

olsun. Şimdi g nin bbi bir fonksiyon olduğunu göstermeliyiz. Gerçekten

$$\begin{aligned} g(u) = g(v) &\Rightarrow \forall i(i \in I) f_i(u_i) = f_i(v_i) \\ &\Rightarrow \forall i(i \in I) u_i = v_i \\ &\Rightarrow (u_i) = u = v = (v_i) \end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 19.7.4. $a = \natural A$ ise $2^a = \natural(\mathscr{P}(A))$ dır.

Çözüm: `Önerme` 18.3.7 den hemen görülür.

Örnek 19.7.5. a herhangi bir nicelik sayısı ise $a < 2^a$ dır.

Çözüm: 18.1.4 Cantor Teoreminden çıkar.

Örnek 19.7.6. $2^{\aleph_0} = c$ dir.

Çözüm: $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesini düşünelim, $\natural Q = \aleph_0$; olduğundan, `Örnek` 19.7.4 gereğince, $\natural(\mathscr{P}(Q)) = 2^{\aleph_0}$ dır. Şimdi bir $f : \mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{Q}))$ fonksiyonunu şöyle tanımlayalım:

$$f(a) = \{x \,|\, x \in \mathbb{Q},\, x < a\}$$

Şimdi f nin bbi bir fonksiyon olduğunu göstereceğiz. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq b$ ise ($a < b$ diyelim) öyle bir $r \in \mathbb{Q}$ vardır ki $a < r < b$ olur. Tanımdan $r \in f(b)$ ve $r \notin f(a)$ çıkar. Bu, f nin bbi olması demektir. Öyleyse

$$c \leq 2^{\aleph_0}$$

olur. Bu eşitsizliğin tersini göstermek için, ω doğal sayılar kümesinin bütün belirtgen (karakteristik) fonksiyonları kümesine $\mathcal{B}$ diyelim; yani

$$\mathcal{B} = \{\chi_A \,|\, A \subset \omega\}$$

olsun. Şimdi bir h fonksiyonunu

$$h : \mathcal{B} \to [0,1]$$
$$h(\chi_A) = 0, \chi_A(1)\chi_A(2)\chi_A(3)\ldots\chi_A(n)\ldots$$

diye tanımlayalım. Her $n \in \omega$ için $\chi_A(n)$ ya 0 dır ya da 1 dir. Dolayısıyla, yukarıdaki ifade bir rasyonel sayının, 2 tabanına göre, sonsuz açılımıdır. $A \neq B$ ise $\chi_A \neq \chi_B$ ve dolayısıyla $h(\chi_A) \neq h(\chi_B)$ olacağı apaçıktır; yani h fonksiyonu bbi bir fonksiyondur. Öyleyse, $2^{\aleph_0} < c$ olacaktır. Artık bu iki eşitsizlikten istenen şey çıkar.

Örnek 19.7.7. $c = \aleph_0.\aleph_0.\aleph_0.\ldots = \aleph_0^{\aleph_0}$ olduğunu gösteriniz,

Çözüm: Bunun ispatını birkaç adımda yapacağız:

1.Adım: A sayılabilir bir küme ise

$$\mathscr{P}(A) \approx \mathscr{P}(A \times A)$$

dır. Çünkü $A \approx A \times A$ olduğunu `Teorem` 17.3.4 den biliyoruz. Eşgüçlü iki kümenin kuvvet kümeleri de eşgüçlü olacaktır.

2.Adım: $A^A \preccurlyeq \mathscr{P}(A \times A)$ dır. Bunu görmek için her hangi bir $f \in A^A$ alalım. f ile onun G_f grafiği birbirlerini tek olarak belirliyordu. Dolayısıyla f yerine G_f grafiğini kullanabiliriz.

$$f \leftrightarrow G_f = \{(a_i, f(a_i)) \,|\, a_i \in A, i \in \omega\} \subset A \times A$$

dır. Her f için bu yapılabildiğine göre istenen çıkar.

3.Adım: $A^A \preccurlyeq \mathscr{P}(A)$ dır. $\preceq$ bağıntısının geçişme özeliği kullnılırsa istenen şey önceki iki adımdan çıkar.

4.Adım: $\mathscr{P}(A) \preccurlyeq A^A$ dır. Bunu göstermek için

$$\Phi : A^A \to \mathscr{P}(A),\ f \in A^A \Rightarrow \Phi(f) = f(A)$$

fonksiyonunun örten olduğunu göstermek yetecektir. Oysa bu özelik apaçıktır. 3. ve 4. Adımlardan

$$\begin{aligned} A^A \preccurlyeq \mathscr{P}(A) &\Leftrightarrow (\natural A)^{\natural A} \\ &\Leftrightarrow \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \\ &\Leftrightarrow \aleph_0^{\aleph_0} = c \end{aligned}$$

çıkar. $\boxdot$

[16]

19.8 PROBLEMLER

1. a herhangi bir nicelik sayısı ise

   (i) $a + 0 = a,\ a0 = 0,\ a^0 = 1$
   (ii) (ii) $1a = a,\ a^1 = a,\ 1^a = 1$

   olduğunu gösteriniz.

2. a ile b herhangi iki nicelik sayısı ise

   $$ab = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$$
   $$ab = 1 \Leftrightarrow (a = 1 \wedge b = 1)$$

   ab= 0 <=> (a= 0 V b= 0) ab=1 <=> (a= l A b= 1) olduğunu gösteriniz.

3. a sonsuz bir nicelik sayısı ve n sonlu bir nicelik sayısı ise $a+n = a$ olduğunu gösteriniz.

4. a sonsuz bir nicelik sayısı ise $a + \aleph_0 = a$ olduğunu gösteriniz.

5. n sonlu bir nicelik sayısı ise

   $$\begin{aligned} n.\aleph_0 &= \aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 + \ldots \aleph_0 = \aleph_0 \\ (\aleph_0)^n &= \aleph_0.\aleph_0.\aleph_0. \ldots \aleph_0 = \aleph_0 \\ nc &= c + c + c + \ldots + c = c \\ c^n &= c.c.c. \ldots .c = c \end{aligned}$$

   olduğunu gösteriniz. *(Eşitliğin sağındaki toplama ve çarpmalarda n öğe var.)*

6. Aşağıdaki eşitlikleri sağlayınız:

$$\begin{aligned} \aleph_0 &= 1+2+3+\ldots n+\ldots \\ &= 1+2^2+2^3+\ldots 2^n+\ldots \\ &= \aleph_0+\aleph_0+\aleph_0+\ldots = \aleph_0.\aleph_0 \\ c &= 1.2.3.\ldots \\ c &= c.c.c.\ldots = c^{\aleph_0} \end{aligned}$$

7. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye 2^c tane fonksiyon olduğunu gösteriniz.

8. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye c tane sürekli fonksiyon olduğunu gösteriniz.

9. Cebirsel olmayan gerçel sayılara *transandant sayılar* denilir. Bu sayıların niceliğinin c olduğunu gösteriniz.

10. $a \leq b$ ise her d nicelik sayısı için

$$a+d \leq b+d \quad \text{ve} \quad ad \leq bd$$

olduğunu gösteriniz.

11. a, b, d herhangi üç nicelik sayısı ise

$$\begin{aligned} a \leq b &\Rightarrow a^d \leq b^d \\ b \leq d &\Rightarrow a^b \leq a^d \end{aligned}$$

olduğunu gösteriniz.

12. Bir kümeler ailesi üzerindenicelik sayılarının eşit olması bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

13. ω^ω nın sayılamaz olduğunu gösteriniz.

14. $A = \{0\}$, $B = \{\frac{1}{n} \,|\, n = 1, 2, 3, \ldots\}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in A \\ \frac{x}{1+2x}, & x \in B \\ x & x \in [0,1] - A \cup B \end{cases}$$

fonksiyonu tanımlanıyor. f nin $[0,1]$ kapalı aralığından $(0,1)$ açık aralığına örten bir fonksiyon olduğunu ama bire-bir olmadığını gösteriniz. Buradan $[0,1]$ ile $(0,1)$ aralıklarının nicelik sayılarının aynı olduğu sonucunu çıkarınız.