Bölüm 20

SIRA SAYILARI

20.1 GİRİŞ

Günlük yaşantımızda nicelik belirten sayılar yanında, sıra belirten *birinci, ikinci, üçüncü,...* gibi sıra sayılarının da kullanıldığını söylemiştik. Gerçekte, doğal sayılar hem nicelik hem de sıra belirten sayılardır. Üstelik, sonlu halde bu iki kavram arasında bir ayırım gerekmeyebilir. Ama matematikçileri burada titiz olmaya zorlayan şey, *sonsuzluk* halidir. Nasıl ki sonlu kümeler ile sonsuz kümelerin özelikleri birbirlerinden bazı yönlerden çok farklı ise, sonsuzluk halinde, sıra sayıları ile nicelik sayılarının özelikleri birbirlerinden çok farklıdır.

Doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir önermenin her doğal sayı için geçerli olduğunu göstermek için, *sonlu tüme varım ilkesini* kullanıyorduk. Gerçekten, sonlu tüme varım ilkesi kolay kullanılabilen güçlü bir ispat yöntemidir. Bu ispat yönteminin esası doğal sayıların iyi sıralanmış olmasına bağlıdır. Anımsarsanız, bu yöntem şu basit kurala dayanıyordu. $p(0)$ doğrudur ve $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ gerektirmesi sağlanır.

Bunu başka türlü söyleyebiliriz: p önermesini sağlayan doğal sayılar kümesi M olsun.

1. İlk doğal sayı M ye aittir : $0 \in M$
2. $n \in M \Rightarrow (n+1) \in M$ dir.

Şimdi aklımıza gelmesi gereken soru şudur. Acaba bu güçlü ispat yöntemi başka kümeler için de geçerli değil midir? Tüme Varım İlkesi, esasta doğal sayıların iyi sıralı oluşuna dayalı olduğuna göre, iyi sıralı her kümeye bu yöntemin uygulanabilmesini umut edebiliriz. Tüme Varım İlkesi, iyi sıralı her kümeye uygulanabilecekse, o zaman iyi sıralabilen kümelerin hangi kümeler olduğunu bilmeye gereksinim doğar.

Bu bölümde, önce, sıra sayılarının kuruluşunu kısaca açıklayacağız. Bir kümeyi sıralamak deyince, anlayacağınız şey nedir? Bu kümenin *birinci, ikinci, üçüncü,...* öğelerini belirlemek demektir. Sonlu halde, bunda hiçbir zorluk yoktur. Hattâ $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesindeki sıraya uyan bir sırayı üzerine koyabileceğimiz için, sayılabilir sonsuz bir kümenin sıralanması doğal olarak yapılabilir. Doğal sayılar *iyi sıralı* olduğundan, doğal sayılara sıraca eş yapılı olan bir küme de *iyi sıralı* olacaktır. Çünkü, doğal sayılar kümesine eşgüçlü olan bir kümenin öğeleri, doğal sayıların öğeleriyle bire-bir eşleştirilerek, aynı sıra yapısı o kümeye taşınabilir. Bunu matematik diliyle ifade edelim.

A sayılabilir sonsuz bir küme ise bir $f : \mathbb{N} \to A$ bire-bir-örten (bbö) fonksiyonu vardır. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için $f(m) = a_m \in A$ ve $f(n) = a_n \in A$ diyelim.

Tanım 20.1.1. $A \approx \mathbb{N}$ ise, A kümesi üzerine

$$(m, n \in \mathbb{N}) \wedge (m \leq n) \Rightarrow (f(m) \leq f(n)) \Leftrightarrow (a_m \leq a_n) \tag{20.1}$$

sıralama bağıntısını koyalım.

Önerme 20.1.1. *(20.1) sıralamasına göre* $(A, \leq)$ *sistemi iyi sıralıdır.*

İSPAT: f nin eşsıra dönüşümü olduğu apaçıktır.

Bu önerme, iyi sıralamayı, doğal sayılardan sayılabilir sonsuz kümelere taşıdığı için iyi bir genellemedir. Ancak, amacımız için yeterli değildir. Doğal sayılardan daha güçlü kümeler için; yani sayılamaz sonsuz kümeler için de benzer işi yapmayı istiyoruz. Küme sayılamaz sonsuz olduğunda; yani doğal sayılardan daha güçlü olduğunda, ortaya koyacağımız tüme varım ilkesine *"sonlu ötesi tüme varım ilkesi"* diyeceğiz.

20.2 İYİ SIRALANMIŞ KÜMELER

Tikel sıralanmış bir sistemin her alt kümesinin en küçük öğesi varsa bu sistem iyi sıralanmış bir sistemdir demiştik (bkz. `Tanım` 9.4.1). Şimdi iyi sıralanmış kümeleri daha ayrıntılı olarak incelemeye geçebiliriz.

Önerme 20.2.1. *İyi sıralanmış her küme tam sıralıdır.*

İSPAT: $(A, \preceq)$ iyi sıralı olsun. Her $a \in A$ ve her $b \in A$ için $\{a, b\}$ alt kümesinin en küçük öğesi vardır. En küçük öğe a ise $a \preceq b$ olur. En küçük öğe b ise $b \preceq a$ olur. Dolayısıyla tam sıralama koşulları sağlanır (bkz. Tanım 9.3.1) koşulu sağlanıyor.

Tanım 20.2.1 (Sonal öğe)**.** $(A, \preceq)$ *tikel (kısmen) sıralanmış bir sistem* olsun ve herhangi bir $B \subset A$ alt kümesi verilsin. B nin kendi içinde bulunmayan üst sınırlarının oluşturduğu kümenin alt sınırlarının en büyüğüne; yani

$$\alpha = \inf\{x \mid x \in A \wedge \forall y(y \in B \Rightarrow y \prec x)\} \tag{20.2}$$

öğesine B kümesinin *ilk sonalı* denilir.

Özel olarak B yerine tek öğeli bir $\{b\}$ kümesi alınırsa (20.2) öğesi b nin *ilk sonalı* adını alır.

Eğer bir b öğesinin ilk sonalı a ise $b \prec a$ olduğu ve $b \prec x \prec a$ olacak şekilde hiçbir $x \in A$ öğesinin var olamayacağı açıktır. *İyi sıralanmış* bir kümede en büyük eğeden başka bütün eğelerin birer tane ilk sonalları vardır. Gerçekten $y \in A$ en büyük öğe (maksimum) değilse, $\{x \mid x \in A,\ y \prec x\}$ kümesi boş değildir ve varsayım gereğince bunun bir en küçük öğesi (minimum) vardır. Bu öğe y nin ilk sonalı olacaktır.

Tanım 20.2.2. a öğesi b öğesinin ilk sonalı ise, b ye a nın *ilk öneli*, denir.

Önerme 20.2.2. *İyi sıralanmış bir kümenin her alt kümesi de iyi sıralıdır.*

İSPAT: $(A, \preceq)$ iyi sıralanmış bir sistem olsun ve bir $B \subset A$ alt kümesi verilsin. $(B, \preceq)$ nin tikel sıralı olacağı açıktır. Öte yandan B nin her C alt kümesi aynı zamanda A nın da bir alt kümesidir. Dolayısıyla C nin en küçük öğesi (minimum) vardır.

Tanım 20.2.3 (Önel bölük)**.** $(W, \preceq)$ iyi sıralanmış bir sistem olsun ve bir $a \in W$ öğesi verilsin.

$$W_a = \{x \mid x \in W \wedge x \prec a\} \tag{20.3}$$

alt kümesine W kümesinin a ile saptanan *önel bölüğü* diyeceğiz.

20.3 SONLU ÖTESİ TÜME VARIM İLKESİ

Teorem 20.3.1. $(W, \preceq)$ *iyi sıralanmış bir sistem olsun ve bir* $A \subset W$ *alt kümesi verilsin.* $W_a \subset A$ *olduğunda* $a \in A$ *olması gerekiyorsa* $A = W$ *olur.*

İSPAT: Teoremin simgelerle ifadesi şöyledir:

$$[(a \in W \wedge W_a \subset A) \Rightarrow a \in A] \Longrightarrow A = W \tag{20.4}$$

Olmayana ergi yöntemini kullanacağız. $A \neq W$ olsaydı $A' \cap W \neq \emptyset$ olurdu. Bu durumda, $A' \cap W$ nun en küçük öğesine (minimum) a diyelim. a dan küçük öğeler $A' \cap W$ kümesine ait olamayacaklarından $W_a \subset A$ dır. Öyleyse, varsayımdan, $a \in A$ çıkar. Oysa $a \in A' \cap W$ idi, ki buradan $a \in A'$ olması gerekir. Bu çelişki kabulümüzden gelmektedir. O halde, $A \neq W$ olamaz; yani $A = W$ dir.

20.4 EŞSIRALI KÜMELER

Bundan sonraki kesimde *iyi sıralanmış kümelerin* çok önemli bir özeliğini ispatlayacağız. *İyi sıralanmış iki küme ya eşsıralıdır ya da, biri ötekinin bir önel bölüğüne eşittir.* Bu özelik, sıralanmış kümelerin yapılarının benzer olması anlamına gelir. Matematikte bunun pek çok uygulaması vardır. Bu özelik, *sıra sayıları* yardımıyla *nicelik sayıları* işlenirken kullanılır. Bu kesimde sıra sayılarına girmek için gerekli bazı ön bilgileri vereceğiz.

Önce bir anımsatma yapalım. Tikel (kısmen) sıralanmış kümeler için varlığını bildiğimiz başlıca özelikler iyi sıralanmış kümeler için de geçerlidir. Bu bölümde çok kullanacağımız için tanımları yeniden söyleyelim.

Tanım 20.4.1. İyi sıralanmış iki sistem arasında sıra yapısını koruyan bir bbö dönüşümü varsa, bu sistemlere *eşsıralıdır,* denilir.

Eşsıralılığı simgelerle ifade edebiliriz:
$(X, \preceq)$ ile $(Y, \lesssim)$ iyi sıralanmış iki sistem olsun. X ile Y nin *eşsıralı* olması için gerekli ve yeterli koşul her $x, y \in X$ için

$$x \preceq y \Longleftrightarrow f(x) \lesssim f(y) \tag{20.5}$$

özeliğine sahip, bire-bir-örten bir $f : X \to Y$ fonksiyonunun var olmasıdır.

Tanım 20.4.2. $(X, \preceq)$ ile $(Y, \lesssim)$ sistemlerini eşsıralı kılan bir $f : X \to Y$ fonksiyonuna *eşsıra dönüşümü* denir.

Tanım 20.4.3. $(X, \preceq)$ ile $(Y, \lesssim)$ sistemleri eşsıralı ve eşsıra dönüşümü f ise, bu durumu belirtmek amacıyla

$$X \cong Y, \quad X \overset{f}{\cong} Y \tag{20.6}$$

simgelerinden herhangi birisini kullanacağız.

Önerme 20.4.1. *A ile B tikel sıralanmış iki küme olsun. A ile B eşsıralı ve A iyi sıralanmış ise B kümesi de iyi sıralanmış bir küme olur.*

İSPAT: B nin herhangi bir C alt kümesinin en küçük öğesinin varlığını göstermeliyiz. `Önerme` 13.3.2 gereğince kendisi ve tersi artan birer dönüşüm olan bire-bir-örten $f : A \to B$ fonksiyonu vardır. $f^{-1}(C) \subset A$ alt kümesinin en küçük (minimum) öğesine a diyelim. f(a), C nin en küçük öğesi olacaktır.

Teorem 20.4.1. *$(X, \preceq)$ iyi sıralanmış bir küme ve $f : X \to X$ bir eşsıra dönüşümü ise, her $x \in X$ için $x \preceq f(x)$ dir.*

İSPAT: $f(x) \prec x$ olacak şekilde herhangi bir $x \in X$ varsa, bu özeliğe sahip öğelerin en küçüğü vardır; buna u diyelim. $f(u) \prec u$ olacaktır, f fonksiyonu bir eşsıra dönüşümü olduğundan, (20.5) uyarınca $f(f(u)) \prec f(u)$ olmalıdır. Şu halde bu özeliği sağlayan öğelerin en küçüğü u değildir. Bu çelişki, kabulümüzün var olamayacağını, yani her $x \in X$ için $x \preceq f(x)$ olduğunu gösterir.

Teorem 20.4.2. *İyi sıralanmış iki kümenin birinden ötekine en çok bir tane eşsıra dönüşümü var olabilir.*

İSPAT: X, Y iyi sıralanmış kümeler ve $f : X \to Y, \quad g : X \to Y$ iki tane eşsıra dönüşümü olsun. $f^{-1} \circ g$ *bileşke fonksiyonu* X den X 'e bir eşsıra dönüşümü olur. Öyleyse, `Teorem` 20.4.1 gereğince, her $x \in X$ için $x \preceq (f^{-1} \circ g)(x)$ olmalıdır, ki bu $f(x) \preceq g(x)$ olması demektir.
Aynı yolla $g(x) \preceq f(x)$ elde edilebilir. Şu halde her $x \in X$ için $f(x) = g(x)$ olacaktır ki, bu $f = g$ olması demektir.

Uyarı 20.4.1. İyi sıralanmış kümelerdeki bu özelik, tam sıralı kümeler için yoktur; yani tam sıralı iki küme arasında birden çok eşsıra dönüşümü var olabilir.

Teorem 20.4.3. *İyi sıralanmış, bir küme hiç bir önel bölüğü ile eşsıralı değildir.*

İSPAT: $(X, \preceq)$ iyi sıralı bir sistem, $a \in X$ olmak üzere $X \overset{f}{\cong} X_a$ olsaydı, `Teorem` 20.4.1 den her $x \in X$ için $x \preceq f(x)$ ve özel olarak $a \preceq f(a)$ olurdu, ki bu X_a önel bölüğünün tanımı gereğince, $f(a) \notin X_a$ olmasını gerektirir ve kabulümüze aykırı düşer.

Bu teoremde gördüğümüz gibi, iyi sıralanmış bir küme hiçbir *önel bölüğüne* eşsıralı olamıyor, ama aşağıdaki anlamda, bütün önel bölüklerinin kümesine eşsıralı olmaktadır.

Teorem 20.4.4. *İyi sıralanmış her küme, kapsama ($\subset$) bağıntısına göre sıralanmış önel bölükleri kümesi ile eşsıralıdır.*

İSPAT: Verilen iyi sıralanmış küme $(X, \preceq)$ olsun ve önel bölükleri kümesine de $\mathscr{U}$ diyelim; yani

$$\mathscr{U} = \{Y \mid \exists z(z \in X \wedge Y = X_z)\} \tag{20.7}$$

olsun. Bu durumda $x \leftrightsquigarrow X_x$ dönüşümü X den $\mathscr{U}$ ya bbö dir. Ayrıca her $a, b \in X$ için

$$a \preceq b \Longleftrightarrow X_a \subset X_b \tag{20.8}$$

olduğundan, bu dönüşüm $(X, \preceq)$ den $(\mathscr{U}, \subset)$ sistemine bir eşsıra dönüşümüdür.

20.4.1 PROBLEMLER

1. Tam sıralı kümeler arasındaki eşsıralılık bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

2. Tam sıralı bir kümenin iyi sıralı olması için gerekli ve yeterli koşul azalan sonsuz bir diziyi kapsamamasıdır (Başka bir deyişle, doğal sırada negatif tamsayılara eşsıralı bir diziye sahip olmamasıdır). Gösteriniz.

3. $(X, \preceq)$ tam sıralı bir küme olsun. Her $A \subset X$ alt kümesinin hem ilk hem son öğesi varsa, gösteriniz ki X sonlu bir kümedir.

4. İyi sıralı olma koşulu yerine tam sıralı olma koşulu alınırsa, 20.4.1, 20.4.2, 20.4.3 teoremlerin sağlanmayacağını birer karşıt örnek ile gösteriniz.

5. Tam sıralı öyle bir A kümesi ve bir $f : A \to A$ eşsıra dönüşümü bulunuz ki, f dönüşümünün sabit noktası olmasın; yani her $x \in A$ için $f(x) \neq x$ olsun.

20.5 SIRA SAYILARI

İyi sıralanmış iki küme benzer iseler, yani sıraca eşyapılı iseler, bu iki kümenin ortak bir özelikleri vardır. İşte bu ortak noktadan hareketle *sıra sayılarını* tanımlayacağız. Kabaca söylersek, iyi sıralanmış bir kümenin sıra sayısı bu kümeye benzer olan bütün kümelerin yapılarını belirleyen soyut bir varlıktır.

Anımsanacağı gibi, nicelik sayılarını tanımlarken, bu sayıların seçilecek özel kümelere bağlı olmadığını göstermek için (15.1) sistemini seçmiştik. Sıra sayıları için de benzer şeyi yapabiliriz. Gerçekten,

$$\emptyset, \quad \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots \tag{20.9}$$

ailesinin kapsama bağıntısına göre iyi sıralanmış olduğu apaçıktır. Ayrıca, burada ilginç bir özelik daha sağlanmaktadır. (20.9) ailesinin öğelerini, sırasıyla,

$$a_0 = \emptyset, \quad a_1 = \{\emptyset\}, \quad a_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad a_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \ldots \tag{20.10}$$

ile gösterelim. Tabii bu durumda (20.9) ailesi

$$a_0 \subset a_1 \subset a_2 \subset a_3 \subset \ldots \tag{20.11}$$

şeklinde kapsamaya göre iyi sıralıdır. Basitliği sağlamak için bu aileyi X ile gösterelim; yani $X = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ olsun. Şimdi X in herhangi bir a_i öğesi ile saptanan önel bölüğünü düşünelim:

$$X_{a_i} = a_i \tag{20.12}$$

olmaktadır. Bu, (20.9) sistemindeki her öğenin saptadığı önel bölüğün, kendisine eşit olması demektir.

20.5.1 Bölüksel Küme

Tanım 20.5.1. $(X, \preceq)$ iyi sıralanmış kümesi verilsin. Eğer X in her a öğesi, a nın saptadığı önel bölüğe eşitse; yani $a = X_a$ ise, $(X, \preceq)$ iyi sıralanmış kümesine ***"bölüksel"*** 'dir, (ya da bölüksel olarak iyi sıralanmıştır) denilir.

Her $(X, \preceq)$ iyi sıralanmış kümesi için, (20.11) gereğince

$$a \preceq b \Leftrightarrow X_a \subset X_b \tag{20.13}$$

olduğundan, her bölüksel iyi sıralanmış küme "kapsama" bağıntısına göre sıralanmıştır. Şu halde X kümesini ve sıralama bağıntısını belirtmeden, ***"bölüksel bir küme"*** dememiz yetecektir.

Teorem 20.5.1. *Bölüksel bir kümenin her önel bölüğü de bölüksel bir kümedir.*

İSPAT: X bölüksel bir küme ve X_a bunun bir önel bölüğü olsun. $X_a \subset X$ olduğundan, X_a iyi sıralanmış bir kümedir. Çünkü iyi sıralı kümenin her alt kümesi de iyi sıralıdır. Öte yandan, her $b \in X_a$ için $(X_a)_b = X_b = b$ olduğundan, X_a bölüksel bir kümedir.

Teorem 20.5.2. *Bölüksel bir X kümesinin bir Y has alt kümesi bölüksel ise, Y alt kümesi X in bir önel bölüğüdür.*

İSPAT: Herhangi bir $a \in Y$ için X içinde $a = X_a$ ve Y içinde $a = Y_a$ olacaktır. Şu halde $X_a = Y_a$ olmalıdır; yani X içinde a dan önce gelen bütün öğeler Y ye ait olacaktır. Y, X in bir has alt kümesi olduğundan $(X - Y) \neq \emptyset$ dir; öyleyse $c = \inf(X - Y)$ olmak üzere $Y = X_c$ olur.

Teorem 20.5.3. *Bölüksel iki kümenin arakesiti bölükseldir.*

İSPAT: X ve Y iki bölüksel küme olsun. Her ikisindeki sıralama kapsama işlemine göre olduğundan, arakesitlerini hem X in hem de Y nin birer alt kümesi olarak düşünürsek, bu da kapsamaya göre iyi sıralanmış bir küme olacaktır. Eğer $a \in X \cap Y$ ise $a = X_a$ ve $a = Y_a$ olur. Bu, X içinde a dan önce gelen bütün öğelerin Y içinde de a dan önce gelmesini, dolayısıyla $X \cap Y$ içinde de aynı şeyin olmasını gerektirir. Şu halde $a \in (X \cap Y)_a$ dır ve buradan $X \cap Y$ nin bölüksel olduğu çıkar.

Teorem 20.5.4. *Bölüksel iki küme eşit değilseler, birisi ötekinin bir önel bölüğüdür.*

İSPAT: X ve Y iki bölüksel küme olsun. $X \cap Y$ bölüksel olduğundan, ya $X \cap Y = X$ dir ya da $X \cap Y$ arakesiti X in bir önel bölüğüdür. Aynı düşünüşle, ya $X \cap Y = Y$ dir ya da $X \cap Y$ arakesiti Y nin bir önel bölüğüdür.

$X \cap Y = X$ ise $X \subset Y$ dir ve dolayısıyla ya $X = Y$ ya da X, Y nin bir önel bölüğü olur.

Benzer olarak, $X \cap Y = Y$ ise, ya $X = Y$ ya da Y, X in bir önel bölüğü olur.

Geriye kalan tek olası durum $X \cap Y$ nin hem X in hem de Y nin birer önel bölüğü; yani $X \cap Y = X_a = Y_b$ olmasıdır. Bu durumda $X_a = a$, $Y_b = b$ olacağından $a = b$ elde edilir, ki bu $a \in X \cap Y$ olmasını gerektirir ve $X \cap Y = X_a$ olduğu kabulüne aykırı düşer.

Teorem 20.5.5. *Bölüksel bir X kümesi bölüksel bir Y kümesiyle eşsıralı ise $X = Y$ dir.*

İSPAT: f eşsıra dönüşümü altında $X \cong Y$ olsun. Belirli bir $a \in X$ öğesinden önce gelen bütün $x \in X$ öğeleri için $x = f(x)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $X_a = Y_{f(a)}$; yani $a = f(a)$ olacaktrr. O halde *sonlu ötesi tüme varım ilkesine* göre, her $x \in X$ için $x = f(x)$; yani $X = Y$ olacaktır.

Sonuç 20.5.1. *İyi sıralanmış bir küme, en çok bir tane bölüksel küme ile eşsıralı olabilir.*

Bölüksel kümeleri sıra sayıları olarak alabilmek için, iyi sıralanmış her kümenin bolüksel bir küme ile eşsıralı olduğunu göstermemiz gerekiyor. Aşağıdaki iki teoremde bunu ele alacağız.

Teorem 20.5.6. *İyi sıralanmış bir X kümesinin her önel bölüğü bir bölüksel küme ile eşsıralı ise, X bölüksel bir küme ile eşsıralıdır.*

İSPAT: Kabul edelim ki, X in X_x önel bölüğü g_x eşsıra dönüşümüyle bir $Z(x)$ bolüksel kümesine resmedilsin; yani $X_x = Z(x)$ olsun.

$$Z = \{z \mid \exists x(x \in X \wedge z = Z(x))\} \tag{20.14}$$

diyelim. Şimdi

$$f : X \to Z, \quad f(x) = Z(x)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $x \prec y$ olmak üzere $x, y \in X$ verilsin. Buna göre, g_x eşsıra dönüşümü altında

$$X_x \cong Z(x)$$

ve g_y nin X_x kümesine kısıtlanmışı olan $g_{y_{|X_x}}$ eşsıra dönüşümü altında

$$X_x = (X_y)_x \cong (Z(y))_{g_{y(x)}}$$

olacaktır. Kabulümüz gereğince $Z(x)$ bölüksel olduğundan $(Z(y))_{g_{y(x)}}$ de bölüksel olur; çünkü, bölüksel bir kümenin bir önel bölüğüdür. Şu halde `Teorem` 20.5.5 den,

$$Z(x) = (Z(y))_{g_{y(x)}} \tag{20.15}$$

çıkar. $x \prec y$ olduğundan da $Z(x)$ in $Z(y)$ nin bir önel bölüğü olduğu ve böylece

$$x \prec y \Rightarrow Z(x) \subset Z(y) \tag{20.16}$$

özeliğinin sağlandığı görülür, $x \neq y$ olduğunda $x \prec y$ ve $y \prec x$ varsayımlarından ancak bir tanesi doğru olacağından, (20.16) den

$$x \prec y \Longleftrightarrow Z(x) \subset Z(y) \tag{20.17}$$

sonucunu çıkarabiliriz. Artık (20.16) den $f : X \to Z$ fonksiyonunun bbö olduğu, (20.17) den de f nin $(X, \preceq)$ den $(Z, \subset)$ sistemine bir eşsıra dönüşümü olduğu çıkar. $(X, \preceq)$ iyi sıralanmış olduğundan $(Z, \subset)$ sistemi de iyi sıralanmıştır.

(20.15) egitliğine dönerek, $Z(x)$ yerine $f(x)$ ve $Z(y)$ bölüksel olduğundan $(Z(y))_{g_{y(x)}}$ yerine $g_y(x)$ yazabiliriz.

Böylece, her $x \prec y$ için

$$f(x) = g_y(x) \tag{20.18}$$

yani

$$f_{|X_y} = g_y \tag{20.19}$$

elde edilir. Artık Z deki iyi sıralamanın bölüksel olduğu hemen görülür; çünkü

$$\begin{aligned} Z_{z_y} &= \{z \mid \exists x(x \in X \wedge Z(x) \subset Z(y) \wedge z = Z(x))\} \\ &= \{z \mid \exists x(x \in X \wedge x \prec y \wedge z = f(x))\} \\ &= \{z \mid \exists x(x \in X \wedge x \prec y \wedge z = g_y(x))\} \\ &= Z(y) \end{aligned}$$

dir.

Teorem 20.5.7. *İyi sıralanmış her küme bir ve yalnız bir tane bölüksel küme ile eşsıralıdır.*

İSPAT: X iyi sıralanmış bir küme olsun. Sonlu ötesi tüme varım ilkesiyle `Teorem` 20.5.5 den X ile eşsıralı bir bölüksel kümenin varlığı çıkar. Bunun tekliği ise `Sonuç` 20.5.1 tan biliniyor.

20.6 SIRA SAYILARININ KARŞILAŞTIRILMASI

X iyi sıralanmış, bir küme olsun. X ile eşsıralı olan biricik bölüksel kümeye X in sıra sayısı diyecek ve bunu

$$\bar{X}, \quad \widetilde{X}, \quad ord(X) \tag{20.20}$$

simgelerinden birisiyle göstereceğiz.

Teorem 20.6.1. *İyi sıralanmış iki kümenin eşsıralı olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul, bu iki kümenin aynı sıra sayısına sahip olmasıdır.*

İSPAT: X ve Y verilen iyi sıralanmış kümeler ise,

$$X \cong Y \Longleftrightarrow \bar{X} = \bar{Y} \tag{20.21}$$

olduğunu göstermeliyiz. $X \cong \bar{X}$ ve $Y \cong \bar{Y}$ olduğu açıktır. `Teorem` 20.5.5 gereğince

$$X \cong Y \Leftrightarrow \bar{X} \cong \bar{Y} \Leftrightarrow \bar{X} = \bar{Y} \tag{20.22}$$

olur.

Teorem 20.6.2. *İyi sıralanmış iki küme eşsıralı değilseler, birisi ötekinin bir önel bölüğü ile eşsıralıdır,*

İSPAT: X ve Y verilen iyi sıralanmış kümeler olsun. Uygun f ve g dönüşümleri altında

$$X \overset{f}{\cong} \bar{X}, \qquad Y \overset{g}{\cong} \bar{Y} \tag{20.23}$$

dir. `Teorem` 20.5.4 gereğince, aşağıdaki üç durumdan birisi vardır:

(a) $\bar{X} = \bar{Y}$

(b) $\bar{X} = \bar{Y}_y$ $\quad$ (Y_y, $\bar{Y}$ nin bir önel bölüğüdür).

(c) $\bar{Y} = \bar{X}_x$ $\quad$ ($\bar{X}_x$ $\bar{X}$ nin bir önel bölüktür.

(a) durumu varsa $X \cong \bar{Y}$ olur. (b) durumu varsa $X \cong Z_{g^{-1}(y)}$ olur. (c) durumu varsa $Y \cong X_{f^{-1}(x)}$ olur. Böylece istenen şey elde edilmiş olur.

Buraya kadar söylenenleri bir araya derlersek, aşağıdaki önerme ortaya çıkar:

Önerme 20.6.1. α, β *herhangi iki sıra sayısı ise, aşağıdaki üç durumdan birisi ve yalnızca birisi vardır:*

(i) α *sıra sayısı* β *sıra sayısının has bir önel bölüğüdür; yani* $\alpha \in \beta$ *dır.*

(ii) $\alpha = \beta$ *dır.*

(iii) β *sıra sayısı* α *sıra sayısının has bir önel bölüğüdür; yani* $\beta \in \alpha$ *dır.*

Sıra sayıları kümesi üzerinde $\leq$ simgesiyle gösterilen bir bağıntıyı şöyle tanımlayalım:

Tanım 20.6.1. α, β herhangi iki sıra sayısı ise

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \quad \alpha, \beta \text{ nın bir önel bölüğüdür} \tag{20.24}$$
$$\Leftrightarrow (\alpha \in \beta) \vee (\alpha = \beta) \tag{20.25}$$

dır.

Bu tanımı kullanarak, alıştığımız üçleme (trichotomy) kuralını yazabiliriz:

Önerme 20.6.2. *α, β herhangi iki sıra sayısı ise aşağıdaki üç durumdan birisi ve yalnızca birisi vardır:*

(i) $\alpha \in \beta$

(ii) $\alpha = \beta$

(iii) $\beta \in \alpha$

20.7 SIRA SAYILARININ ARİTMETİĞİ

Sıra sayıları içinde *toplama, çarpma ve üs alma* işlemleri tanımlanabilir. Aşağıda, sıra sayıları içindeki aritmetik işlemlerini tanımlamakla yetinecek, ayrıntılara girmeyeceğiz. Önce eşitsizlik tanımından başlayalım.

Tanım 20.7.1. α ve β iki sıra sayısı ve $\alpha = \bar{A}$, $\beta = \bar{B}$ olacak şekilde iyi sıralanmış A ve B kümeleri verilsin. Eğer A kümesi, B nin bir önel bölüğüne benzerse, α sıra sayısı β sıra sayısından küçüktür, denilir ve

$$\alpha < \beta \tag{20.26}$$

simgesiyle gösterilir.

Sıra sayıları içindeki toplama işlemini tanımlamak için, sıralanmış bileşimleri bilmemiz gerekiyor.

Tanım 20.7.2. A ve B tam sıralanmış iki küme ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. $A \cup B$ içinde, şu şekilde bir sıralama işlemi tanımlayalım:

$x, y \in A \cup B$ için $x \prec y$ olması için gerekli ve yeterli koşullar şunlardır:

$$x \prec y \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \wedge y \in B, & \\ (x, y \in A) \wedge (x \prec y) & \text{A daki sıralamaya göre} \\ (x, y \in B) \wedge (x \prec y) & \text{B deki sıralamaya göre} \end{cases}$$

İçinde bu sıralama bağıntısı olan $A \cup B$ bileşimini $A \uplus B$ simgesiyle göstereceğiz.

Uyarı 20.7.1. $A \uplus B$ nin $B \uplus A$ dan farklı olacağına dikkat ediniz. Yukardaki tanım, genel olarak, bir kümeler ailesi için de söylenebilir.

20.7.1 Sıra Sayılarının Toplamı

Tanım 20.7.3 (Toplama)**.** α ve β iki sıra sayısı ise $\alpha = \bar{\bar{A}}$ ve $\beta = \bar{\bar{B}}$ olmak üzere; $\alpha \oplus \beta = \text{ord}(A \uplus B)$ dır.

Burada A ve B kümeleri iyi sıralı olduğundan, $A \uplus B$ bileşimi de iyi sıralı olacaktır. Çünkü her küme iyi sıralanabilir. Kolayca görüleceği gibi, sıra sayılarında toplama işlemi

$$(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) \tag{20.27}$$

birleşme (associative) özeliğine sahiptir. Ancak, sıra sayılarında toplama işlemi yer değişim (commutative) özeliğine sahip değildir; yani

$$\alpha \oplus \beta \neq \beta \oplus \alpha \tag{20.28}$$

dır.

20.7.2 Sıra sayılarının Çarpımı

Tanım 20.7.4. İyi sıralanmış A ve B kümelerinin $A \times B$ kartezyen çarpımının ters konum sıralaması şöyle tanımlanır: $(a, a'), (b, b') \in A \times B$ için

$$(a, a') < (b, b') \Leftrightarrow [(a' < b') \vee (a' = b' \wedge a < b)] \tag{20.29}$$

Bu bağıntıya göre $A \times B$ iyi sıralanmıştır. Üstündeki bu sıralamanın var olduğunu belirtmek için $A \times B$ kartezyen çarpımını, $A \boxtimes B$ simgesiyle gösterelim.

Tanım 20.7.5 (Çarpma)**.** a ile b iki sıra sayısı ise, $a = \bar{A}$, $b = \bar{B}$ olmak üzere, sıra sayılarının çarpımı aşağıdaki kural ile tanımlanır:

$$a.b = ord(A \boxtimes B) \tag{20.30}$$

Sıra sayılarında $\oplus$ çarpma işlemi şu özeliklere sahiptir:

(i) $(ab)c = a(bc)$

(ii) $a(b \oplus c) = ab \oplus ac$ (dağılma özeliği)

(iii) $(b \oplus c)a \neq ba \oplus ca$

(ii) ve (iii) özeliklerinden şunu görüyoruz: Sıra sayılarında soldan çarpmanın toplama üzerinde dağılma özeliği vardır, ama sağdan çarpmanın toplama üzerine dağılma özeliği yoktur.

20.7.3 Sıra sayılarında Üs Alma

Sıra sayılarının sonlu üsleri (kuvvetleri) çarpma yardımıyla tanımlanabilir. Böylece

$$\omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \omega^4,\ \omega^5, \ldots \tag{20.31}$$

üsleri bulunabilir. Sonsuz kuvvetlerini tanımlamak için

$$\omega,\ \omega^{\omega},\ \omega^{\omega^{\omega}},\ \omega^{\omega^{\omega^{\omega}}},\ \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}}, \ldots \tag{20.32}$$

biçimindeki dizileri düşünmek gerekir. Bu ileri konu bu dersin kapsamı dışındadır.

20.8 BÜTÜN SIRA SAYILARIN SINIFI

BÜTÜN SIRA SAYILARIN SINIFI: W

Buraya kadar yaptığımız işlemlerde, bölüksel kümelerle sıra sayılarını bir tutmuş olduk. Yani *"bölüksel küme"* deyimi ile *"sıra sayısı"* deyimi eş anlamlı olmaktadır. Özel olarak, bölüksel bir X kümesinin $\bar{X}$ sıra sayısının X olduğu apaçıktır.

Bütün sıra sayılarının sınıfını W ile göstereceğiz. Tabii W nin öğeleri kümeler olduğundan, W kapsama bağıntısına göre tikel sıralanmış bir kümedir. Ayrıca, `Teorem` 20.5.4 gereğince, tam sıralı olmaktadır. Giderek, W nun iyi sıralı olduğunu ve bölüksel bir küme olduğunu göstermek mümkündür. Buradan hareketle, şu teorem ifade edilebilir.

Teorem 20.8.1. *Herhangi bir a sıra sayısı, " a dan küçük olan bütün sıra sayılarından oluşan W_a iyi sıralanmış kümesinin sıra sayısıdır.*

İSPAT: $a = W_a$ olacak şekilde bir $W_a = W$ var olacaktır. a bölüksel bir küme olduğundan $a = a$ dır; yani $W_a = W_a$ dır. Böylece istenen $a = Wa$ eşitliği çıkar.

20.8.1 PROBLEMLER

1. Bölüksel bir kümenin bütün alt - kümeleri kümesinin, yani kuvvet kümesinin, kapsamaya göre iyi sıralı olmadığını gösteriniz.
2. A, B, C, D birbirlerinden *ayrık ve tam sıralı* kümeler olsun. $A \cong C, B \cong D$ ise $A \uplus B \cong C \uplus D$ olduğunu gösteriniz.
3. Sıra sayıları için toplama işleminin birleşebilir olduğunu gösteriniz.
4. α, β, γ sıra sayıları ve $\alpha \oplus \beta = \alpha \oplus \gamma$ ise $\beta = \gamma$ olduğunu gösteriniz.
5. İyi sıralı her sonlu küme bir doğal sayı ile eşyapılıdır. Gösteriniz
6. Her doğal sayı, iyi sıralı sonlu bir kümeye eşyapılıdır.