Bölüm 21

AKSİYOMLAR VE PARADOKSLAR

KÜMELER KURAMININ AKSİYOMLARI VE PARADOKSLAR

21.1 KÜMELERİN AKSİYOMATİK YAPISI

Hatırlanacağı üzere, bu dersin başlangıcında, kümeler kuramını aksiyomatik olarak incelemeyeceğimizi söylemiş, ve kümeyi *"öğelerin topluluğu"* olarak ele almıştık. Ama bu tanımın *"küme"* nin niteliğini ortaya koyamadığını anlamak için çok dikkatli bir düşünce bile gerekmiyor. O halde, şimdiye değin sezgiye dayanarak üzerinde çalıştığımız *"küme"* nin varlığını garanti edecek daha belirgin kavramlar gereklidir. Yine belirtelim ki, bu dersin amacı, kümeler kuramını aksiyomatik olarak incelemek değildir. Bu bolümde yapmak istediğimiz şey, kümeleri salt sezgi yoluyla ele alınca, giderek bazı paradokslarla karşılaştığımızı; ancak başlangıçta bazı aksiyomları kabul ederek, hem "küme" nin varlığını garanti etmenin, hem de paradokslardan kurtulmanın mümkün olduğunu belirtmektir. Kümeler kuramını ilk kez sistematik olarak inceleyen matematikçi *Georg Cantor* (1815-1918) dur. Cantor, kümeler cebirini, buraya kadar bizim sezgi yoluyla yaptığımız gibi ortaya koymuştur. Daha sonraları, matematiğin temelleri araştırılmaya başlanınca, Kümeler Kuramı, Cantor'dan sonraki matematikçiler tarafından daha formal olarak biçimlendirilmeye çalışılmıştır. Cantor'un "küme" deyiminden kastettiği şu idi: x değişkeni (değişkenleri) bir p önermesini sağlıyorsa $\{x \,|\, p(x)\}$ kümesi

$$a \in \{x \,|\, p(x)\} \Leftrightarrow p(a) \tag{21.1}$$

şeklinde tanımlanır. Bu düşünüşle, her p önerme fonksiyonu bir küme tanımlar. Kavrama ilkesi (principle of Comprehension) denilen bu yolla kümelerin belirlenmesi geçen yüzyılın ünlü matematikçisi ve düşünürü Bertrant Russel, kendi adıyla anılan paradoksu ortaya atana dek süregeldi. Gerçekte ilk ortaya konan

Russel paradoksu değil, 1897 de bulunan *Burali-Forti* paradoksudur; bunu bu bölümün sonunda açıklayacağız.

21.1.1 Russel Paradoksu

Russel Paradoksu (1902 -1903): $p(x)$ önerme fonksiyonunu $x \notin x$ olarak tanımlayalım. p nin tanımladığı küme $w = \{x \mid x \notin x\}$ kümesidir. Bu durumda

$$w \in w \Rightarrow w \notin w \tag{21.2}$$
$$w \notin w \Rightarrow w \in w \tag{21.3}$$

olacaktır ki, bu ne $w \in w$ ve ne de $w \notin w$ önermesinin doğru olamayacağını ya da her ikisinin de aynı anda doğru olduğunu gösterir. Bu, kümeler Kuramında bir çatışkı (paradoks) yaratır. Bu demektir ki, kümeleri salt bir önerme fonksiyonu ile belirlemek, bizi paradoksa götürüyor. Öyleyse, kümeler kuramımın varlığını garanti edecek bazı belitleri (aksiyomları) koymak zorundayız, Kümeler Kuramının belitsel (aksiyomatik) kuruluşu, matematikçiler tarafından değişik biçimlerde yapılmıştır. Ancak bunları iki standart yola ayırmak mümkündür.

21.2 RUSSEL YÖNTEMİ

Russel tarafından kurulan bu biçimde, esas düşünce, bizi paradoksa götüren *"kümelerin kümesi"* kavramından sakınmak için, kümeleri sınıflara ayırmaktır. Russel'a göre; bireyler, bireylerin kümeleri, bireylerin kümelerinin kümeleri,... vb. birbirlerinden farklı düzeydeki varlıklardır. Şu halde $x \in y$ nin anlamlı olabilmesi, ancak y nin x den sonraki düzeyde olmasıyla mümkündür. Öyleyse, $x \in x$ (dolayısıyla $x \notin x$) ifadesi küme tanımlamak için bir önerme fonksiyonu değildir. Buradan hareketle, Russel paradoksuna götüren $\{x \mid x \notin x\}$ kümesinin var olamayacağı (tabii, kümeler kuramını Russel anlamında kurarsak) anlaşılır.

Russel yöntemiyle kümeler kuramının kuruluşuna, bugüne kadar, öldürücü bir itiraz gelememiştir. Ancak, bu yöntemin her matematikçi tarafından kabul edilmesi beklenemez. Özetlersek, Russel yönteminde, kümeler kuramında paradoksu doğuran kavramdan mantıksal (logic) bir yolla sakınılmaktadır.

21.3 ZERMELO YÖNTEMİ

Bu yöntemde, mantıksal bir biçime girmeden, doğrudan doğruya, kümeler kuramında karşılaştığımız işlem ve kavramları doğuracak yeterlikte ve paradokslardan koruyacak nitelikte bazı aksiyomlar kabul edilmektedir. Bu yöntemi ilk kez Zermelo (1908), ortaya koymuş ve daha sonra çeşitli matematikçiler tarafından geliştirilmiştir. Zermelo yöntemini daha çok açıklamayı denemek yerine, bu yöntemle kümeler kuramının nasıl kurulduğunu bir örnekle açıklamak daha yararlı olacaktır.

21.3.1 Zermelo-Fraenkel Aksiyomları

Küme ve öğe kavramı ilkel kavramlardır (her ikisi de tanımsızdır). Kümelerin, aşağıda ifade edilecek aksiyomların dışında hiçbir özeliğe sahip olduğu varsayılmaz. *Zermelo - Fraenkel kuramında*, belirli varlıkların bölgesi düşünülür ve bu bölgedeki varlıklar kümeler olarak kabul edilir. *Küme ve öğe* arasında bir ayırım yoktur. Bu bölgede $\in$ simgesiyle gösterilen belirli bir bağıntı *"öğelik" bağıntısı* olarak kabul edilir ve $a \in b$ ("a, b nin öğesidir") şeklindeki ilkel kavram (tanımsız kavram) olarak alınır. Bir b kümesinin her öğesi bir c kümesinin de öğesi oluyorsa, b ye c nin bir *alt kümesidir*, denilir ve $b \subset c$ ile gösterilir.

1. Yayma Beliti: Eğer iki küme aynı öğelere sahipse, bunlar birbirine eşittir; yani

$$\forall x(x \in a \Leftrightarrow x \in b) \Longrightarrow a = b \tag{21.4}$$

dir.

2. İlkel Kümeler Beliti: Hiçbir öğesi olmayan bir $\emptyset$ kümesi vardır. Eğer a ve b iki kümeyse, yalnız a öğesine sahip $\{a\}$ kümesi ile yalnız a ve b öğelerine sahip olan $\{a, b\}$ kümesi vardır.

3. Alt Kümelerin Seçilmesi Beliti: a verilmiş bir küme, $p(x)$ her bir $x \in a$ için anlamlı bir önerme fonksiyonu ise, öyle bir b kümesi vardır ki, b nin öğeleri a nın $p(x)$ önermesini doğru kılan x öğelerinden ibarettir:

$$x \in b \Leftrightarrow (x \in a \wedge p(x)) \tag{21.5}$$

4. Kuvvet Kümesi Beliti: a verilmiş bir kümeyse, öğeleri a nın bütün alt kümelerinden ibaret olan bir $\mathscr{P}(a)$ kümesi vardır:

$$x \in \mathscr{P}(a) \Leftrightarrow x \subset a \tag{21.6}$$

5.Bileşim Beliti: a verilmiş bir kümeyse, öğeleri a nın öğelerinin öğelerinden ibaret olan bir $\cup a$ kümesi (buna a nın *bileşimi* denir) vardır:

$$x \in \cup a \Leftrightarrow \exists y(x \in y \wedge y \in a) \tag{21.7}$$

6.Seçme Beliti: Bir a kümesi verilsin. a nın bütün öğeleri $\emptyset$ dan farklı olsun ve bu öğelerin ortak öğeleri var olmasın. Bu durumda, öyle bir c kümesi vardır ki, bunun a nın her öğesiyle bir ve bir tek ortak öğesi vardır.

7.Sonsuzluk Beliti: Öyle bir küme vardır ki, $\emptyset$ bunun bir öğesidir ve eğer e bunun bir öğesi ise $\{e\}$ de bir öğesi olur.

8.Yerleştirme Beliti: a verilmiş bir küme olsun, a nın her x öğesini bir tek y öğesine bağlayan bir $\psi(x, y)$ önerme fonksiyonu varsa; yani

$$\forall x[x \in a \Rightarrow \exists y(\psi(x, y) \wedge \forall z(\psi(x, z) \Rightarrow y = z))] \tag{21.8}$$

varsa, öyle bir a' kümesi vardır ki, bunun öğeleri tamamıyla, yukarıdaki biçimde a nın öğelerine bağlanan y lerden ibarettir.

9.Kurma Beliti: a boş olmayan herhangi bir kümeyse, a nın öyle bir e öğesi vardır ki, a ile e nin hiçbir ortak öğesi yoktur.

Açıklanmalarına girmeyeceğimiz bu aksiyomların bazısı, zaten alışkın olduğumuz özeliklerin ifadesinden ibarettir. Ama bazıları da, hemen sezgiyle anlaşılamayacak daha derin anlama sahiptir. Örneğin, son aksiyomu açıklamak için Bernay'in tamamen formalize edilmiş sistemlerine girmek gerekir, ki bu dersin kapsamı dışında olduğunu söylemiştik.

21.4 PARADOKSLAR

Bu bolümü bitirmeden Önce bazı ünlü paradoksları (çatışkıları) söylemek yararlı olacaktır.

21.4.1 Cantor Paradoksu

(Bütün kümelerin kümesi) Bütün kümelerin kümesine $\mathscr{A}$ diyelim. Tabii $\mathscr{A}$ nın her alt kümesi yine $\mathscr{A}$ nın bir öğesidir. Şu halde $\mathscr{A}$ nın kuvvet kümesi de $\mathscr{A}$ nın bir alt kümesi olacaktır; yani

$$\mathscr{P}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{A} \tag{21.9}$$

olacaktır, ki buradan

$$\mathscr{P}(\mathscr{A}) \prec \mathscr{A} \tag{21.10}$$

çıkar. Oysa 18.1.4 Cantor Teoremine göre

$$\mathscr{P}(\mathscr{A}) \succ \mathscr{A} \tag{21.11}$$

olduğunu biliyoruz. Şu halde, *"bütün kümelerin kümesi"* kavramı bizi bir paradoksa götürmektedir.

21.4.2 Russel Paradoksu

Bütün kümelerin kümesini

(a) Kendi kendini içeren kümeler;

(b) Kendi kendini içermeyen kümeler;

diye ikiye ayırsak daha önce açıklamış olduğumuz 21.1.1 *Russel Paradoksuna* varıyoruz.

21.4.3 Burali-Forti paradoksu

Bütün sıra sayılarının kümesine Δ diyelim. Δ nın (yukardaki W sınıfı yerinde olduğunu düşünürsek) bölüksel bir küme olacağını biliyoruz. Şu halde Öyle bir $W_\lambda = \lambda \in W$ vardır ki

$$\Delta = \lambda = W_\lambda, \quad (\Delta = W) \tag{21.12}$$

olur. Oysa bu TEOREM 20.4.3 ile çelişir, zira (21.12) bağıntısı *iyi sıralı* $W = \Delta$ kümesinin W_λ önel bölüğüne benzer olmasını gerektiriyor. Hemen görüldüğü gibi, bu paradokstan kurtulmak için, *"bütün sıra sayılarının kümesi"* deyimi yerine "bütün sıra sayılarının W sınıfı" deyimini kullanıyoruz. Zaten, yukardakî paradokstan, Δ kümesinin var olmadığı anlamını çıkarabiliriz.

21.4.4 Bütün Nicelik Sayılarının Kümesi

Bütün nicelik sayılarının kümesine $\mathscr{N}$ diyelim. Her $a \in \mathscr{N}$ nicelik sayısı için $a = \natural(A_a)$ olacak şekilde bir A kümesi vardır.

$$A = \bigcup_{a \in \mathscr{N}} A_a \tag{21.13}$$

diyelim. $\mathscr{P}(A)$ nın nicelik sayısı $\natural(\mathscr{P}(A)) \in \mathscr{N}$ olduğundan

$$\natural(\mathscr{P}(A)) = \natural(A_{\natural(\mathscr{P}(A))}) \tag{21.14}$$

olacak şekilde bir $A_{\natural(\mathscr{P}(A))}$ kümesi vardır. (21.13) in tanımından

$$A_{\natural(\mathscr{P}(A))} \subset A$$

dır. O halde

$$\natural(\mathscr{P}(A)) = \natural(A_{\natural(\mathscr{P}(A))}) \preceq \natural(A)$$

olacaktır. Oysa

$$\natural(\mathscr{P}(A)) \succeq \natural(A)$$

olması gerekiyordu. Görülüyor ki, bütün nicelik sayılarının kümesi kavramı bizi paradoksa götürüyor. [6], [7], [11], [2], [14], [24]

21.5 OKUMA PARÇALARI

Yukardakilere benzer daha birçok paradoks vardır. Biz burada popüler birkaç tanesini daha söylemekle yetineceğiz.

Berber (Russel, 1919) Bir kasabanın berberi, o kasabada kendi kendisini traş etmeyen herkesi ve yalnız onları traş ediyor. Acaba bu berber, kendi kendini traş eder mi?

Belediye Başkanı Bir masal ülkesinde her belediye bir başkana sahip olmalıdır ve farklı iki belediye aynı başkana sahip olamaz. Bazı belediye başkanları, başkanı oldukları belediyenin sınırları dışında ikâmet ediyorlar. Kabul edelim ki, yeni bir kanunla bu tür belediye başkanları bir S bölgesine yerleştiriliyor. S bölgesi o kadar büyük oluyor ki, burada da yeni bir belediye kurmak gerekiyor. S nin başkanı nerede oturmalıdır?

Avukat ve Öğrencisi Olay eski Yunan'da geçer. O zamanın ünlü bir avukatı bir öğrencisine özel avukatlık dersleri verecektir. Öğrencisiyle şöyle anlaşırlar:

> Dersler bitene dek öğrenci hiç ücret ödemeyecektir. Eğer, öğrenci ilk girdiği davayı kazanacak olursa, öğretmenine belirli bir ücret ödeyecektir; eğer ilk davasını kazanamazsa, hiçbir ders ücreti ödemeyecektir.

Bir süre sonra dersler bitmiş ve öğrenci artık genç bir avukat olmuştur. Ama uzun sure hiçbir davayı üzerine almamış, yaşlı avukatın sabrını taşırmıştır. Ücretini almak için öğrencisini mahkemeye veren yaşlı avukat, yargıçlar kuruluna der ki:

> "Eğer bu davayı kazanırsam, yüksek mahkemenin kararı gereğince ücretimi almalıyım; eğer bu davayı kaybedersem, anlaşmamız gereğince öğrencim ilk girdiği davayı kazandığı için yine ücretimi almalıyım ..."

Bu sözleri duyan genç avukat ayağa fırlar ve cevap verir:

> "Hayır! Sayın Yargıçlar Kurulu, öğretmenim yanılıyor. Çünkü, bu davayı ben kazanırsam, mahkemeniz kararı gereğince ücret vermeyeceğim; eğer kaybedersem, anlaşmamız gereğince, yine ücret vermeyeceğim ..."

Acaba, hangisi haklıdır?

Timsah Bir çocuğu kaçıran bir timsah, çocuğun babasına söz veriyor:

> "- Çocuğu geri verip vermeyeceğimi tahmin edebilirseniz, çocuğunuzu yemeden geri vereceğim."

Baba, timsahın çocuğu geri vermeyeceğini tahmin etse, timsah çocuğu geri vermeli midir ?

Epimenide Paradoksu YALANCI PARADOKSU

> "Şu anda söylemekte olduğum şey yalandır."

Acaba bu ifade doğru mu, yalan mı?