

19.8. PROBLEMLER

//

0.1 PROBLEMLER

//

1. a herhangi bir nicelik sayısı ise

(i) $a + 0 = a$, $a0 = 0$, $a^0 = 1$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

Aşağıdaki kümelerin eşgüçlülüğünden nicelik sayıları için istenen eşitlikler elde edilebilir: $\mathfrak{h}(A) = a$ olan bir A kümesi düşünelim.

$$\begin{aligned}
 A \cup \emptyset &\approx A \Rightarrow \mathfrak{h}(A \cup \emptyset) = \mathfrak{h}(A) \\
 &\Rightarrow a + 0 = a \\
 A \times \emptyset &\approx \emptyset \Rightarrow a.0 = 0 \\
 A^\emptyset &= F = \{f | f : \emptyset \rightarrow A\} \\
 &= F = \{f : \emptyset \rightarrow \emptyset\} \\
 &\Rightarrow \mathfrak{h}(A^\emptyset) = \mathfrak{h}(F) = 1 \\
 &\Rightarrow a^0 = 1
 \end{aligned}$$

(ii) (ii) $1a = a$, $a^1 = a$, $1^a = 1$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

Aşağıdaki kümelerin eşgüçlülüğünden nicelik sayıları için istenen eşitlikler elde edilebilir: $\mathfrak{h}(A) = a$ olan bir A kümesi düşünelim ve herhangi bir x ögesini seçelim. $\mathfrak{h}(\{x\}) = 1$ dir. Buna göre

$$\begin{aligned}
 A \times \{x\} &\approx A \Rightarrow \mathfrak{h}(A \times \{x\}) = \mathfrak{h}(A) \\
 &\Rightarrow a.1 = a \\
 A^{\{x\}} &= F = \{f | f : \{x\} \rightarrow A\} \\
 &\Rightarrow \mathfrak{h}(A^{\{x\}}) = \mathfrak{h}(F) = a \\
 \{x\}^A &= G = \{f : A \rightarrow \{x\}\} \\
 &\Rightarrow \mathfrak{h}(\{x\}^A) = \mathfrak{h}(G) = 1 \\
 &\Rightarrow 1^a = 1
 \end{aligned}$$

2. a ile b herhangi iki nicelik sayısı ise

$$ab = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$$

$$ab = 1 \Leftrightarrow (a = 1 \wedge b = 1)$$

$ab = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$ $ab = 1 \Leftrightarrow (a = 1 \wedge b = 1)$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

$\mathfrak{h}(A) = a$ ve $\mathfrak{h}(B) = b$ olan A ve B kümelerini alalım. ve herhangi bir $x \in A$ öğesini seçelim. $\mathfrak{h}(\{x\}) = 1$ dir. Buna göre

$$a.b = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{h}(A) \times \mathfrak{h}(B) = \mathfrak{h}(\emptyset)$$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{h}(A \times B) = \mathfrak{h}(\emptyset)$$

$$\Leftrightarrow A \times B \approx \emptyset$$

$$\Leftrightarrow A = \emptyset \text{ ve } B = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{h}(A) = \vee \mathfrak{h}(B) = 0$$

$\mathfrak{h}(A) = a$ ve $\mathfrak{h}(B) = b$ olan A ve B kümelerini ile herhangi bir x, y öğelerini seçelim. $\mathfrak{h}(\{x\}) = \mathfrak{h}(\{y\}) = 1$ dir. Buna göre

$$a.b = 1 \Leftrightarrow \mathfrak{h}(A) \times \mathfrak{h}(B) = 1$$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{h}(A \times B) = 1$$

$$\Leftrightarrow A \times B \approx \mathfrak{h}(\{x\} \times \{y\})$$

$$\Leftrightarrow A \approx \mathfrak{h}(\{x\}) \wedge B \approx \mathfrak{h}(\{y\})$$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{h}(A) = 1 \wedge \mathfrak{h}(B) = 1$$

çıkar.

3. a sonsuz bir nicelik sayısı ve n sonlu bir nicelik sayısı ise $a+n = a$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: $a = \mathfrak{h}(A)$ ve $n = \mathfrak{h}(B)$ olsun. B sonludur, dolayısıyla sayılabilir. Teorem 17.3.3 uyarınca A sonsuz ve B sayılabilir bir küme ise $A \cup B \approx A$ dir. (19.1) ve (19.2) bağıntılarından,

$$A \cup B \approx A \Rightarrow a + n = a$$

çıkar.

4. a sonsuz bir nicelik sayısı ise $a + \aleph_0 = a$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

$$a \text{ sonsuz} \Rightarrow a \geq \aleph_0$$

$$\Rightarrow (\exists b)a = b + \aleph_0$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
 a + \aleph_0 &= (b + \aleph_0) + \aleph_0 \\
 &= b + (\aleph_0 + \aleph_0) \\
 &= b + 2\aleph_0 \\
 &= b + \aleph_0 \\
 &= a
 \end{aligned}$$

çıkar. Karşıt olarak,

$$\begin{aligned}
 a + \aleph_0 = a &\Rightarrow a \geq \aleph_0 \\
 &\Rightarrow a \text{ sonsuz}
 \end{aligned}$$

olur. $\square$

5. n sonlu bir nicelik sayısı ise

$$\begin{aligned}
 (i) \quad n \cdot \aleph_0 &= \overbrace{\aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 + \dots \aleph_0}^{n \text{ kez}} = \aleph_0 \\
 (ii) \quad (\aleph_0)^n &= \overbrace{\aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_0 \dots \aleph_0}^{n \text{ kez}} = \aleph_0 \\
 (iii) \quad nc &= \overbrace{c + c + \dots + c}^{n \text{ kez}} = c \\
 (iv) \quad c^n &= \overbrace{c \cdot c \cdot c \dots c}^{n \text{ kez}} = c
 \end{aligned}$$

olduğunu gösteriniz.

Doğal sayılar kümesini ω ile, gerçel sayılar kümesini $\mathbb{R}$ ile gösterelim. $\aleph(\omega) = \aleph_0$ ve $\aleph(\mathbb{R}) = \aleph_1 = c$ simgelerini kullanacağız.

ÇÖZÜM (i):

$\{A_i : \aleph(A_i) = \aleph_0, i = 1, 2, 3, \dots, n, (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)\}$ koşulunu sağlayan sonlu bir kümeler ailesi seçelim. Sonuç 17.3.1 uyarınca sayılabilir kümelerin sonlu tanesinin bileşimi sayılabilir bir kümedir. Buradan

$$\omega \approx \bigcup_{i=1}^n A_i \Rightarrow \aleph_0 = n \cdot \aleph_0 = \overbrace{\aleph_0 + \aleph_0 + \dots + \aleph_0}^{n \text{ kez}}$$

çıkar.

ÇÖZÜM (ii):

$\{A_i : \aleph(A_i) = \aleph_0, i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ koşulunu sağlayan sonlu bir kümeler ailesi seçelim. Sonuç 17.3.2 uyarınca sayılabilir kümelerin sonlu tanesinin kartezyen çarpımı sayılabilir bir kümedir. Buradan

$$\omega \approx \prod_{i=1}^n A_i \Rightarrow \aleph_0 = (\aleph_0)^n = \overbrace{\aleph_0 \cdot \aleph_0 \dots \aleph_0}^{n \text{ kez}}$$

çıkar.

ÇÖZÜM (iii):

Örnek 19.6.7 ve (i) eşitliği kullanılırsa, nicelik sayıları aritmetiğinden,

$$\begin{aligned}
 c &\leq 2.c \\
 &= 2.2^{\aleph_0} \\
 &\leq 2^{\aleph_0}.2^{\aleph_0} \\
 &= (2^{\aleph_0})^2 \\
 &= 2^{2.\aleph_0} \\
 &= 2^{\aleph_0} \quad (i) \text{ eşitliğinden} \\
 &= c
 \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan $c \leq 2.c \leq c \Rightarrow c = 2.c$ sonucu çıkar. Artık Sonlu Tümevarım İlkesinden, istenen bağıntı çıkarılabilir.

ÇÖZÜM (iv):

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$$

eşitliğinde Örnek 19.6.7 ve (i) bağıntıları kullanılırsa, nicelik sayıları aritmetiğinden,

$$\mathfrak{h}(\mathbb{R}^n) = (2^{\aleph_0})^n = 2^{n.\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$$

yazılabilir. Buradan,

$$c^n = \mathfrak{h}(\mathbb{R}^n) = c$$

sonucu çıkar.

6. Aşağıdaki eşitlikleri sağlayınız:

- (i) $\aleph_0 = 1 + 2 + 3 + \dots n + \dots$
- (ii) $\aleph_0 = 1 + 2^2 + 2^3 + \dots 2^n + \dots$
- (iii) $\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 + \dots + \aleph_0 + \dots = \aleph_0.\aleph_0$
- (iv) $c = 1.2.3.4 \dots n \dots$
- (v) $c = \aleph_0.\aleph_0.\aleph_0 \dots \aleph_0 \dots = \aleph_0^{\aleph_0}$
- (vi) $c = c.c.c \dots = c^{\aleph_0}$
- (vii) $c = c + c + c + \dots + c + \dots = c.\aleph_0$

ÇÖZÜM (i):

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathfrak{h}(A_n) = n$ olan ayrık bir $\{A_n\}$ kümeler dizisi alalım. A_n kümelerinin her biri sonludur; dolayısıyla herbirisi sayılabilir. Teorem

17.3.5 uyarınca, sayılabilir sayıda sayılabilir kümelerin bileşimi sayılabilir. O halde

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &\approx \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \aleph(\mathbb{N}) = \sum_{n=1}^{\infty} \aleph(A_n) \\ &\Rightarrow \aleph_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n \\ &\Rightarrow \aleph_0 = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots\end{aligned}$$

çıkar.

ÇÖZÜM (ii):

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\aleph(A_n) = n$ olan ayrık bir $\{A_n\}$ kümeler dizisi alalım. A_n kümelerinin her biri sonludur. *Önerme 18.3.7* uyarınca $\mathcal{P}(A_n) \approx 2^{A_n}$ dir. A_n sonlu olduğundan 2^{A_n} sonludur, dolayısıyla sayılabilir. Teorem 17.3.5 uyarınca, sayılabilir sayıda sayılabilir kümelerin bileşimi sayılabilir. O halde

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &\approx \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}(A_n) \Rightarrow \aleph(\mathbb{N}) = \sum_{n=0}^{\infty} \aleph(\mathcal{P}(A_n)) \\ &\Rightarrow \aleph_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \aleph(2^{A_n}) \\ &\Rightarrow \aleph_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \aleph(2^n) \\ &\Rightarrow \aleph_0 = 1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n + \cdots\end{aligned}$$

olur.

ÇÖZÜM (iii):

Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \approx \omega$ ve $\aleph(A_n) = \aleph_0$ olan ayrık bir $\{A_n\}$ kümeler dizisi alalım. A_n kümelerinin her biri sayılabilir. Teorem 17.3.5 uyarınca, sayılabilir sayıda sayılabilir kümelerin bileşimi sayılabilir. O halde

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &\approx \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \Rightarrow \aleph(\mathbb{N}) = \sum_{n=0}^{\infty} \aleph(A_n) \\ &\Rightarrow \aleph_0 = \sum_{n=0}^{\infty} n \\ &\Rightarrow \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 + \cdots + \aleph_0 + \cdots = \aleph_0 \cdot \aleph_0\end{aligned}$$

çıkar.

ÇÖZÜM (iv):

Yukarıdaki sonuçları kullanarak

$$\begin{aligned} 1.2.3.4 \dots n \dots &\leq \aleph_0.\aleph_0.\aleph_0 \dots \aleph_0 \dots \\ &= (\aleph_0)^{\aleph_0} \\ &= c \quad (\text{Teorem 19.7.7 den}) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu ise $c \leq 1.2.3.4 \dots n \dots \leq c$ demektir; ki buradan

$$c = 1.2.3.4 \dots n \dots$$

eşitliği çıkar.

ÇÖZÜM (v):

Teorem 19.7.7 de

$$c = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_0.\aleph_0.\aleph_0 \dots \aleph_0 \dots$$

olduğu gösterildi.

ÇÖZÜM (vi):

Yukarıdaki bağıntılardan

$$\begin{aligned} c &\leq c.c.c \dots c \dots \\ &= c.\aleph_0 \\ &= 2^{\aleph_0}.2^{\aleph_0}.2^{\aleph_0} \dots 2^{\aleph_0} \dots \\ &= (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} \\ &= 2^{\aleph_0^2} \\ &= 2^{\aleph_0} \\ &= c \end{aligned}$$

yazılabilir.

ÇÖZÜM (vii):

$$\begin{aligned} c &\leq c + c + c + \dots + c + \dots \\ &= c.\aleph_0 \\ &\leq c.c.c \dots c \dots \\ &= c^{\aleph_0} \\ &= c \quad ((vi) \text{ dan }) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$c \leq c.\aleph_0 \leq c \Rightarrow c = c.\aleph_0$$

eşitliği çıkar.

7. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye 2^c tane fonksiyon olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

$F = \{f|f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ olsun. $F = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dir. Bunun nicelik sayısı

$$\mathfrak{h}(F) = \mathfrak{h}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}) = c^c = (2^{\aleph_0})^c = (2)^{c \cdot \aleph_0} = 2^c$$

olur. Son eşitliği yazarken Problem 6 – (v) eşitliği kullanılmıştır.

8. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye $c = 2^{\aleph_0}$ tane sürekli fonksiyon olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

$\mathcal{C} = \{f|f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli}\}$ olsun. Bir f fonksiyonunun sürekli olması için yoğun bir alt küme üzerinde sürekli olması gerekli ve yeterlidir. Ayrıca, salt metriğe göre $\mathbb{R}$ Birinci Sayılabilir Belitini sağladığından, $\mathbb{R}$ üzerinde bir fonksiyonun sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul dizisel sürekli olmasıdır. Buna göre her $f \in \mathcal{C}$ yerine f nin $\mathbb{Q}$ yoğun alt kümesine kısıtlanmış $f|_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu alabiliriz. $f \leftrightarrow f|_{\mathbb{Q}}$ bire bir ve örten bir eşleşmedir. Simgeleri basitleştirmek için $f|_{\mathbb{Q}}$ yerine f_Q simgesini kullanalım. Buna göre, $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}} = \{f_Q|f_Q : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli}\}$ olmak üzere $\mathcal{C} \approx \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ olacaktır. Eşgüçlü bu iki kümenin nicelik sayıları eşittir. Öyleyse, aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \approx \mathcal{C}_{\mathbb{Q}} &\Leftrightarrow \mathfrak{h}(\mathcal{C}) = \mathfrak{h}(\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{h}(\mathcal{C}) = \mathfrak{h}(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{h}(\mathcal{C}) = c^{\aleph_0} \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{h}(\mathcal{C}) = c \end{aligned}$$

dir. $F = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dir. Bunun nicelik sayısı

$$\mathfrak{h}(F) = \mathfrak{h}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}) = c^c = (2^{\aleph_0})^c = (2)^{c \cdot \aleph_0} = 2^c$$

olur.

9. Cebirsel olmayan gerçel sayılara *transandant sayılar* denilir. Bu sayıların niceliğinin c olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

Cebirsel sayılar kümesininsayılabılır olduğu Teorem 17.3.7 ile gösterilmiştir.

Cebirsel sayıları C ile, transandant sayıları T ile gösterelim. $\mathbb{R} = C \cup T$ ve $C \cap T = \emptyset$ dir.

$$\mathbb{R} = C \cup T \Rightarrow \mathfrak{h}(\mathbb{R}) = \mathfrak{h}(C) + \mathfrak{h}(T)$$

bağıntısı kullanılırsa, C sayılabilir bir küme olduğundan T nin sayılamaz sonsuz bir küme olduğu görülür. Öte yandan, Teorem 17.3.3 gereğince, $C \cup T \approx T \Rightarrow \mathfrak{h}(C \cup T) = \mathfrak{h}(T)$ olacaktır. Bunu yukarıdaki bağıntı ile birleştirirsek,

$$\mathfrak{h}(\mathbb{R}) = c = \mathfrak{h}(C) + \mathfrak{h}(T) = \mathfrak{h}(T)$$

eşitliği bulunur.

10. $a \leq b$ ise her d nicelik sayısı için

$$a + d \leq b + d \quad \text{ve} \quad ad \leq bd$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

(bkz. Önerme 19.5.3)

11. a, b, d herhangi üç nicelik sayısı ise

$$a \leq b \Rightarrow a^d \leq b^d$$

$$b \leq d \Rightarrow a^b \leq a^d$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

(bkz. Önerme 19.5.3)

12. Bir kümeler ailesi üzerinden nicelik sayılarının eşit olması bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

$$A \approx B \Leftrightarrow \mathfrak{h}(A) = \mathfrak{h}(B)$$

diye tanımlanan $\approx$ bağıntısının (8.1) – (8.3) koşullarını sağladığı kolayca görülür.

13. ω^ω nın *sayılamaz* olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

$$\mathfrak{h}(\omega^\omega) = \aleph_0^{\aleph_0} = c$$

olduğu Örnek 19.7.7 de gösterildi.

14. $A = \{0\}$, $B = \{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in A \\ \frac{x}{1+2x}, & x \in B \\ x & x \in [0, 1] - A \cup B \end{cases}$$

fonksiyonu tanımlanıyor. f nin $[0, 1]$ kapalı aralığından $(0, 1)$ açık aralığına örten bir fonksiyon olduğunu ama bire-bir olmadığını gösteriniz. Buradan $[0, 1]$ ile $(0, 1)$ aralıklarının nicelik sayılarının aynı olduğu sonucunu çıkarınız.

ÇÖZÜM:

f nin örten olduğu apaçıktır. $f(0) = 1/2$ ve $f(1) = 1/2$ olduğundan fonksiyon bire-bir değildir.

