

Bölüm 1

SAYILAMAYAN SONSUZ KÜMELER

1.1 SAYILAMAZ KÜMELER

18.2. PROBLEMLER

1.2 PROBLEMLER

1. Aşağıdaki eşgüçlülükleri gösteriniz:

- (a) Bir küp bir ayırıtına eşgüçlüdür.

ÇÖZÜM:

Her $[a, b]$ aralığı $[0, 1]$ aralığına eşgüçlü olduğundan $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ küpünü düşünmek yetecektir. Teorem 18.1.3 (Cantor Teoremi) gereğince bir kare bir kenarına eşgüçlüdür. O halde,

$$[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \approx [0, 1] \times [0, 1] \approx [0, 1] \quad (1.1)$$

yazılabilir.

- (b) Bir küp bir yüzüne eşgüçlüdür.

ÇÖZÜM: (??) den çıkar. [Teorem 18.1.3 (Cantor Teoremi)].

- (c) Uzay, kendi içindeki bir doğruya eşgüçlüdür.

ÇÖZÜM:

Sonuç 18.3.2 gereğince her d doğrusu $\mathbb{R}^2$ ile eşgüçlüdür. Buradan,

$$\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{R} \quad (1.2)$$

yazabiliriz.

- (d) Her $n \in \omega$ için $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}$ dir.

ÇÖZÜM:

(??) den, her n doğal sayısı için aşağıdaki yinelgen (recursive) formül isteneni verecektir.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &= (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \\ &= \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2} \\ &\approx \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-2} \\ &= \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-3} \\ &\approx \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-3} \\ &\vdots \approx \mathbb{R}\end{aligned}$$

Aynı sonuca Sonlu Tüme Varım Yöntemiyle de ulaşılabilir.

- (e) Bir doğru bir yarım çembere eşgüçlüdür.

ÇÖZÜM:

$B = \{(x, y) | x = r \cos t, y = r \sin t, -1 \leq t \leq 1\}$ kümesi $(0, 0)$ merkezli r yarıçaplı çemberin üst yarısıdır. $\pi : B \rightarrow [-r, r]$ izdüşüm fonksiyonu $\pi[(x, y)] = x$ diye tanımlanır. Başka bir deyişle $(r \cos t, r \sin t) \rightarrow rt$ dir. Bu izdüşüm fonksiyonu üst yarı çemberden $[-r, r]$ aralığına bire bir ve örten bir fonksiyondur. O halde $B \approx [-r, r]$ dir. Her $[a, b]$ aralığı için $[a, b] \approx [-1, 1] \approx [-r, r]$ olduğundan $[a, b] \approx B$ çıkar.

- (f) Bir çokgenin kenarları, bu çokgenin içine çizilen bir çembere eşgüçlüdür.

ÇÖZÜM:

Bunu kümesel işlemlerle gösterebileceğimiz gibi, basit bir geometrik yöntemle de ispatlayabiliriz. Çokgeni dışbükey kabul edelim. Çokgenin içine çizilen çemberin merkezini, çokgenin kenarları üzerindeki noktalara birleştiren doğruları düşünelim. Bu doğruların çemberi kestiği noktalar ile çokgeni kestiği noktalar arasında bire bir örten bir eşleşim vardır. O halde istenen eşgüçlülük ortaya çıkar.

2. Cebirsel olmayan gerçel sayılara *transandant sayılar* denilir. Gösteriniz ki bütün transandant sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ye eşgüçlüdür. Dolayısıyla *sayılamaz sonsuz* bir kümedir.

ÇÖZÜM: Bu problem 18.4-3. problemde çözülüyor.

3. Bir A kümesinin sayılabilir sonsuz olması için gerekli ve yeterli koşul, sonsuz bir $B \subset A$ alt kümesi için $B \approx A$ olmasıdır. Gösteriniz.

ÇÖZÜM:

A sonsuz bir küme ve $B \subset A$ alt kümesi sayılabilir sonsuz olsun. $B \approx A$ ise A kümesi de sayılabilir olacaktır.

18.4. PROBLEMLER

1.3 ALIŞTIRMA

1. $\{A_i \mid i \in I\}$ ve $\{B_j \mid j \in I\}$ aileleri veriliyor. Eğer her $i \in I$ için $A_i \approx B_i$ ise

$$\bigcup_{i \in I} A_i \approx \bigcup_{i \in I} B_i \quad (1.3)$$

$$\prod_{i \in I} A_i \approx \prod_{i \in I} B_i \quad (1.4)$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

$A_i \approx B_i$ ise, her $i \in I$ için bire bir ve örten bir $f_i : A_i \rightarrow B_i$, fonksiyonu $a_i \in A_i \Rightarrow f_i(a_i) = b_i \in B_i$ vardır. Şimdi

$$f : \bigcup_{i \in I} A_i \rightarrow \bigcup_{i \in I} B_i, \quad x \in A_i \Rightarrow f(x) = f_i(x)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bunun bir fonksiyon olduğunu görmek için Teorem 10.1.1 ile verilen F1-F2 koşullarının sağlandığını göstermeliyiz.

F1:

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i \in I} A_i &\Rightarrow (\exists i \in I)(x = a_i \in A_i) \\ &\Rightarrow f(x) = f_i(a_i) \in B_i \\ &\Rightarrow f(x) \in \bigcup_{i \in I} B_i \end{aligned}$$

F2:

$$\begin{aligned} u = w \in \bigcup_{i \in I} A_i &\Rightarrow (\exists i \in I)(u = w = a_i \in A_i) \\ &\Rightarrow [f(u) = f_i(a_i) \in B_i] \wedge [f(w) = f_i(a_i) \in B_i] \\ &\Rightarrow f(u) = f(w) \end{aligned}$$

f fonksiyonu örten bir fonksiyondur:

$$\begin{aligned}
 y \in \bigcup_{i \in I} B_i &\Rightarrow (\exists i \in I)(y = b_i \in B_i) \\
 &\Rightarrow (\exists a_i \in A_i)(f_i(a_i) = b_i \in B_i) \\
 &\Rightarrow \left(\exists a_i \in \bigcup_{i \in I} A_i \right) \left(f_i(a_i) = b_i \in \bigcup_{i \in I} B_i \right) \\
 &\Rightarrow \left(\exists a_i = x \in \bigcup_{i \in I} A_i \right) \left(f_i(a_i) = f(x) = b_i = y \in \bigcup_{i \in I} B_i \right) \\
 &\Rightarrow \left(\exists x \in \bigcup_{i \in I} A_i \right) \left(f(x) = y \in \bigcup_{i \in I} B_i \right)
 \end{aligned}$$

f fonksiyonu bire-birdir:

$$\begin{aligned}
 \left(u, w \in \bigcup_{i \in I} A_i \right) \wedge (u \neq w) &\Rightarrow (\exists i, j \in I)(A_i \ni u = a_i \neq a_j = w \in A_j) \\
 &\Rightarrow B_i \ni b_i = f_i(a_i) \neq f_j(a_j) = b_j \in B_j \\
 &\Rightarrow f(u) = f_i(a_i) \neq f_j(a_j) = f(w) \\
 &\Rightarrow f(u) \neq f(w)
 \end{aligned}$$

2. (*Cantor Kümesi*) 1883 yılında Alman matematikçi *Georg Cantor* tarafından açıklanan, ama daha önce 1875 yılında *Henry John Stephen Smith* tarafından kurgulandığı anlaşılan bu küme, ölçüm kuramında ve topolojide ilginç özelliklere sahiptir.

Küme şöyle kurgulanıyor. İlk adımda $[0, 1]$ aralığının ortasından üçte biri atılıyor. İkinci adımda geriye kalan iki alt aralığın ortalarındaki üçte birlik aralıkları atılıyor. Üçüncü adımda geriye kalan dört alt aralığın ortalarındaki üçte birlik aralıkları atılıyor. Bu eylem sonsuz kez tekrarlanırsa, geriye kalan kümeye *Cantor kümesi* (Cantor ternary set) denilir.

Cantor kümesinin ilginç özelliklerinden bazıları şunlardır:

- (a) n -inci adımda kalan aralıkları veren bir yinelge formülü kurulabilir.
- (b) Boş küme değildir.
- (c) Sayılamaz sonsuz bir kümedir.
- (d) Her adımda atılan üçte birlik aralıkların toplam uzunluğu 1 dir.
- (e) Salt topolojiye göre kapalı bir kümedir.
- (f) Salt topolojiye göre tam bir metrik uzaydır.
- (g) Tamamen sınırlı bir kümedir.
- (h) Tıkız bir kümedir.

- (i) Her noktası bir yığılma noktasıdır.
- (j) Hiç bir iç noktası yoktur.
- (k) Hiç bir yerde yoğun değildir.

Bunları göstermeyi deneyiniz.

YOL GÖSTERME: Ardışık adımlarda geriye kalan aralıklar şunlardır:

- 1. Adım: $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$
- 2. Adım: $[0, \frac{1}{3^2}] \cup [\frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^2}] \cup [\frac{6}{3^2}, \frac{7}{3^2}] \cup [\frac{8}{3^2}, 1]$
- ...
- ...

n -inci adımda atılan küme

$$C_n = \left(\frac{C_{n-1}}{3} \right) \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_{n-1}}{3} \right)$$

Eyleme böyle devam edersek, geriye kalan kısımda hiç bir aralık olamaz. Olsaydı, bir sonraki adımda onun da ortasındaki üçte birlik kısım atılacaktı. Bu nedenle, geriye kalan kısma, yani Cantor kümesine *Cantor tozu* adı da verilir. Ölçüm kuramında bu kümenin ölçümünün 0 olduğu şöyle gösterilir. Her adımda atılan kısımların uzunluğunu biliyoruz. Bunları toplarsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \dots = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right) = 1 \quad (1.5)$$

olur. $[0, 1]$ aralığının ölçümü (uzunluğu) 1 olduğuna göre geriye kalan Cantor tozunun ölçümü 0 olmalıdır.

- 3. Katsayıları rasyonel sayılar olan bir polinomun kökü olan sayıya *cebirsel sayı* denir. Cebirsel olmayan sayılara *transandant sayılar* denilir.

- (a) Cebirsel sayıların sayılabilir olduğunu gösteriniz.
- (b) Transandant sayıların sayılamaz olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

Cebirsel sayılar kümesinin sayılabilir olduğu Teorem 17.3.7 ile gösterilmiştir.

Cebirsel sayıları C ile, transandant sayıları T ile gösterelim. $\mathbb{R} = C \cup T$ ve $C \cap T = \emptyset$ dir.

$$\mathbb{R} = C \cup T \Rightarrow \mathfrak{h}(\mathbb{R}) = \mathfrak{h}(C) + \mathfrak{h}(T)$$

bağıntısı kullanılırsa, C sayılabilir bir küme olduğundan T nin sayılamaz sonsuz bir küme olduğu görülür. Öte yandan, Teorem 17.3.3 gereğince, $C \cup T \approx T \Rightarrow \mathfrak{h}(C \cup T) = \mathfrak{h}(T)$ olacaktır. Bunu yukarıdaki bağıntı ile birleştirirsek,

$$\mathfrak{h}(\mathbb{R}) = c = \mathfrak{h}(C) + \mathfrak{h}(T) = \mathfrak{h}(T)$$

eşitliği bulunur.

