

20. Bölüm

SIRA SAYILARI

0.1 GİRİŞ

20.4.1.PROBLEMLER

1. Tam sıralı kümeler arasındaki eşsıralılık bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

Tam sıralı kümelerden oluşan bir aileyi $\mathcal{T}$ ile gösterelim. $A, B \in \mathcal{T}$ için

$$A \approx B \Leftrightarrow \exists f : A \rightarrow B \quad f \text{ eşyapı dönüşümü} \quad (1)$$

bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu göstereceğiz. Bunun için, Tanım 8.1.1 uyarınca $\approx$ bağıntısının yansıyan, simetrik ve geçişli bir bağıntı olduğunu göstermeliyiz.

BAĞINTI YANSIMALIDIR: Her $A \in \mathcal{T}$ için $I_A : A \rightarrow A$, $I_A(x) = x$ özdeşlik dönüşümü bir eşsıra dönüşümüdür. O halde $A \approx A$ dır.

BAĞINTI SİMETRIKTIR: $A \approx B$ ise bir $f : A \rightarrow B$ eşsıra dönüşümü vardır. Bu durumda $f^{-1} : B \rightarrow A$ ters dönüşümü de bir eşsıra dönüşümüdür. O halde $B \approx A$ dır.

BAĞINTI GEÇİŞLİDİR: $A \approx B$ ve $B \approx C$ ise $f : A \rightarrow B$ ve $g : B \rightarrow C$ eşsıra dönüşümleri vardır. Bu durumda $g \circ f : A \rightarrow C$ bileşke dönüşümü de eşsıra dönüşümü olur. Dolayısıyla $A \approx C$ olacaktır.

2. Tam sıralı bir kümenin iyi sıralı olması için gerekli ve yeterli koşul azalan sonsuz bir diziyi kapsamamasıdır (Başka bir deyişle, doğal sırada negatif tamsayılara eşsıralı bir diziye sahip olmamasıdır). Gösteriniz.

GEREKLİĞİ:

$(X, \preceq)$ tam sıralı bir küme olsun. Bu kümenin iyi sıralı olması için, her alt kümesinin en küçük (minimum) ögesinin olması gerekir. $A = \{a_{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ azalan bir dizi olsun. Her n için $a_{-(n-1)} < a_{-n}$ olduğundan $A \subset X$ altkümesinin en küçük (minimum) ögesi yoktur. Öyleyse $(X, \preceq)$ iyi sıralı değildir.

YETERLİĞİ:

X içinde hiç bir azalan sonsuz dizi var olmasın. $(X, \preceq)$ iyi-sıralı değilse, en küçük ögesi olmayan bir $B \subset X$ alt kümesi vardır. B sonsuz olmak zorundadır. Çünkü, tam sıralı bir sistemde her sonlu alt kümenin en küçük ve en büyük ögeleri vardır. Ayrıca, tamsıralı bir kümenin her alt kümesi de tam sıralı olduğundan B tam sıralı ve sonsuz bir alt-kümedir. Herhangi bir $b_0 \in B$ ögesi seçelim. b_0 ögesi B_0 kümesinin en küçük ögesi olmadığından

$B_0 = \{x \mid x \in A, x \prec b_0\} \neq \emptyset$ dir. O halde bir $b_1 \in B_0$ ögesi seçebiliriz. Benzer düşünüşle, b_1 ögesi B_0 kümesinin en küçük ögesi olmadığından $B_1 = \{x \mid x \in A, x \prec b_0\} \neq \emptyset$ dir. O halde bir $b_2 \in B_1$ ögesi seçebiliriz. X tam sıralı olduğundan $b_1 \prec b_0$ olur. Bu işleme devam edersek,

$$(b_n) \mid b_{(n+1)} \prec b_n, (n = 0, 1, 2, \dots)$$

azalan dizisini oluşturabiliriz. Bu bir çelişkidir. Öyleyse kabulümüz yanlıştır; dolayısıyla $(X, \preceq)$ iyi-sıralı bir sistemdir.

3. $(X, \preceq)$ tam sıralı bir küme olsun. Her $A \subset X$ alt kümesinin hem ilk hem son ögesi varsa, gösteriniz ki X sonlu bir kümedir.

ÇÖZÜM:

Her altkümesinin ilk (en küçük) ögesi var olduğuna göre $(X, \preceq)$ iyi-sıralı bir kümedir. Olmayana Ergi Yöntemini uygulayacağız. X sonsuz olsun. Bir $x_0 \in X$ ögesi seçelim. $A_0 = \{x \mid x \in X, x \prec x_0\} \neq \emptyset$ dir. Bunun en büyük ögesine x_1 diyelim. $(X, \preceq)$ tam sıralı bir küme olduğundan $x_1 \prec x_0$ dur. Bu işleme devam edersek,

$$(x_n) \mid x_{(n+1)} \prec x_n, (n = 0, 1, 2, \dots)$$

azalan dizisini oluşturabiliriz. Önceki problem gereğince, bu sonuç $(X, \preceq)$ iyi-sıralı olması varsayımı ile çelişir. Öyleyse kabulümüz yanlıştır; dolayısıyla $(X, \preceq)$ sonlu bir kümedir.

4. İyi-sıralı olma koşulu yerine tam-sıralı olma koşulu alınır, Teorm 4.3.1, Teorem 4.3.2 ve Teorm 4.3.3 hükümlerinin sağlanmayacağını birer karşıt örnek ile gösteriniz.

ÇÖZÜM:

20.4.1 için Karşıt Örnek: $(\mathbb{Z}, \leq)$ tam sıralı sistemini düşünelim. Her $k \in \mathbb{Z}$ için $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dönüşümünü $f(k) = k - 1$ biçiminde tanımlayalım. Bu dönüşüm bir eşsıra dönüşümüdür ve her $k \in \mathbb{Z}$ için $f(k) < k$ koşulunu sağlar. O halde tam sıralı kümelerde Teorem 20.4.1 geçerli olmayabilir.

20.4.2 için Karşıt Örnek: Yukarıdaki eşsıra dönüşümünden farklı olarak, $k \in \mathbb{Z}$ için $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dönüşümünü $f(k) = k - 2$ biçiminde tanımlayalım. Bu dönüşüm bir eşsıra dönüşümüdür. Daha genel olarak, n_0 sabit bir tamsayı olmak üzere $k \rightarrow k \pm n_0$ dönüşümleri birer eşsıra dönüşümüdür; yani $\mathbb{Z}$ den $\mathbb{Z}$ ye birden çok eşsıra dönüşümü vardır. O halde tam sıralı kümelerde Teorem 20.4.2 geçerli olmayabilir.

20.4.3 için Karşıt Örnek: $\mathbb{Z}$ içinde $W_1 = \{k \mid k < 1\}$ ön-bölüğünü düşünelim. Her $k \in \mathbb{Z}$ için $f : \mathbb{Z} \rightarrow W_1$ dönüşümünü

$$f(k) = \begin{cases} -2n & k = -n \\ 0 & k = 0 \\ -2n + 1 & k = n \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu dönüşüm tam sıralı $\mathbb{Z}$ kümesinden W_1 ön-bölüğüne bir eşsıra dönüşümüdür. O halde tam sıralı kümelerde Teorem 20.4.3 geçerli olmayabilir.

5. *Tam sıralı öyle bir A kümesi ve bir $f : A \rightarrow A$ eşsıra dönüşümü bulunuz ki, f dönüşümünün sabit noktası olmasın; yani her $x \in A$ için $f(x) \neq x$ olsun.*

ÇÖZÜM:

Her $k \in \mathbb{Z}$ için $f(k) = k + 1$ diye tanımlanan $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonu bir eşsıra dönüşümüdür ve her $k \in \mathbb{Z}$ için $f(k) \neq k$ koşulunu sağlar. O halde bu dönüşümün bir sabit noktası yoktur.

20.8.1 PROBLEMLER

1. *Bölüksel bir kümenin bütün alt - kümeleri kümesinin, yani kuvvet kümesinin, kapsamaya göre iyi sıralı olmadığını gösteriniz.*

ÇÖZÜM:

Bir X kümesinin $\mathcal{P}(X)$ kuvvet kümesi $\subset$ kapsama bağıntısına göre tam sıralı değildir. İyi sıralı sistemler tam sıralı olmak zorundadır. Dolayısıyla bölüksel olsun ya da olmasın bir X kümesi için $(\mathcal{P}(X), \subset)$ sistemi iyi sıralı değildir.

2. *A, B, C, D birbirlerinden ayrık ve tam sıralı kümeler olsun. $A \cong C, B \cong D$ ise $A \uplus B \cong C \uplus D$ olduğunu gösteriniz.*

ÇÖZÜM:

$(A, \preceq), (B, \preceq), (C, \preceq), (D, \preceq)$ birbirlerinden *ayrık ve tam sıralı* kümeler olsun. Bileşim küme üzerinde bir sıra yapısı olduğunu göstermek için $A \uplus B = A \cup B$ ve $C \uplus D = C \cup D$ yazıyoruz. $f : A \rightarrow C$ ve $g : B \rightarrow D$ eşsıra dönüşümleri olmak üzere $f \uplus g = h : A \uplus B \rightarrow C \uplus D$ dönüşümünün bir eşsıra dönüşümü olduğunu göstermeliyiz. $A \uplus B$ üzerindeki sıralama bağıntısını

$$x \preceq y \Leftrightarrow \begin{cases} x \preceq y, & x, y \in A \\ x \preceq y, & x \in A \wedge y \in B \\ x \preceq y, & x, y \in B \end{cases}$$

biçiminde ve $C \uplus D$ üzerindeki sıralama bağıntısını

$$u \preceq v \Leftrightarrow \begin{cases} u \preceq v, & u, v \in C \\ u \preceq v, & u \in C \wedge v \in D \\ u \preceq v, & u, v \in D \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda $(A \uplus B, \preceq)$ ve $(C \uplus D, \preceq)$ sistemleri tam sıralı iki sistem olur. Bilindiği gibi $h = f \uplus g$ dönüşümü bbö dir (bkz.

Sonuç 18.3.1). $f(x) = u$ ve $g(y) = v$ konumu yapılırsa, h fonksiyonunun, yukarıda tanımlanan sıralamayı koruduğu görülebilir. Öyleyse, $A \uplus B \cong C \uplus D$ dir.

3. *Sıra sayıları için toplama işleminin birleşebilir olduğunu gösteriniz.*

ÇÖZÜM:

$a = \natural(A), b = \natural(B), c = \natural(C)$ olsun ve A, B, C kümeleri iyi sıralı olsunlar. Önceki problemde uygulanan yöntemle

$$A \uplus (B \uplus C) \cong (A \uplus B) \uplus C$$

olduğu kolayca görülür. Buradan

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$$

eşitliği çıkar.

4. *a, b, c sıra sayıları ve $a \oplus b = a \oplus c$ ise $b = c$ olduğunu gösteriniz.*

ÇÖZÜM:

$a = \natural(A), b = \natural(B), c = \natural(C)$ olsun ve A, B, C kümeleri iyi sıralı olsunlar.

$$A \uplus B \cong A \uplus C \Leftrightarrow B \cong C$$

bağıntısı istemneni verecektir.

5. *İyi sıralı her sonlu küme bir doğal sayı ile eşyapılıdır. Gösteriniz.*

ÇÖZÜM:

$A = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ iyi sıralı sonlu bir küme ise $f(a_i)i$, ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) dönüşümü A dan $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ bbö dir. (15.1) ve (20.9) eşitlikleri kullanılırsa istenen çıkar.

6. *Her doğal sayı, iyi sıralı sonlu bir sayıya eşyapılıdır.*

ÇÖZÜM:

Önceki soruda gösterildi.